

∞ Baccalauréat C Rennes juin 1971 ∞

EXERCICE 1

Soit f la fonction qui associe, à tout nombre réel x , le nombre réel

$$f(x) = |e^{2x} - e^x| - 2.$$

1. Étudier les variations de f .

La fonction f est-elle continue, dérivable pour la valeur 0 de la variable x ?

Construire la représentation graphique (Γ) de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ (on prendra 2 centimètres comme unité de longueur).

2. (Γ) coupe l'axe $y'Oy$ en A. Soit λ un nombre réel négatif et (D_λ) la droite d'équation $x = \lambda$. Exprimer, en centimètres carrés et en fonction de λ , l'aire S_λ de l'ensemble des points dont l'abscisse est comprise entre λ et 0 et qui sont situés entre (Γ) et la parallèle à $x'Ox$ menée par A.

EXERCICE 2

Donner, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.

Un entier A s'écrit 13 321 dans le système de numération de base quatre. Quel est le reste de la division de A par 7?

PROBLÈME

L'univers du problème est un plan euclidien (Π) rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. a étant un nombre réel strictement positif, soit (C) le cercle de centre O et de rayon a .

Soit \mathcal{G} l'ensemble des cercles du plan (Π) orthogonaux à (C) et de rayon non nul. (Γ) étant un élément de \mathcal{G} , on appelle ω son centre et (D) la polaire de O par rapport à (Γ) ; si P désigne un point de (C) , la polaire de P par rapport à (Γ) est notée (Δ) .

Partie A

Dans cette première partie, que l'on demande de traiter géométriquement, sans faire appel aux coordonnées, le point P est un point fixe de (C) et le cercle (Γ) un élément variable.

1. Quelle est l'image Ω de \mathcal{G} par l'application de \mathcal{G} dans (Π) qui à (Γ) , élément de \mathcal{G} , fait correspondre son centre ω ? Cette application est-elle injective?
2. Montrer qu'il existe un point fixe P' de (Π) tel que, quel que soit le cercle (Γ) , élément de \mathcal{G} , (Δ) passe par P' .
3. Si R est la relation définie sur \mathcal{G} par $(\Gamma) R (\Gamma')$ si, et seulement si, la polaire de P par rapport à (Γ') est la droite (Δ) , polaire de P par rapport à (Γ) , montrer que R est une relation d'équivalence. Caractériser, géométriquement, les classes d'équivalence définies dans \mathcal{G} par R . [En d'autres termes, il est demandé, dans cette fin de question, de caractériser géométriquement un ensemble de cercles de (Π) orthogonaux à (C) et de rayon non nul tels que P ait même polaire par rapport à tous ces cercles.]
4. Soit (L) une droite de (Π) passant par P et recoupant (C) en un point B distinct de P. Ω étant la partie de (Π) définie au 1., à tout $\omega \in (L) \cap \Omega$ correspond un cercle (Γ) de centre ω ; soit M l'intersection de (D) avec (Δ) et H l'intersection de (D) avec la droite $(O\omega)$. [On rappelle que (D) et (Δ) sont les polaires respectives de O et de P par rapport à (Γ) .]

- a. Quelle est la polaire de M par rapport à (Γ) ?
 Quel est l'axe radical de (Γ) et du cercle circonscrit au triangle ωBM ?
 Montrer que le cercle circonscrit au triangle ωBM est un cercle (Γ') élément de \mathcal{G} .
 À tout $\omega \in (L) \cap \Omega$ correspond ainsi un point ω' de (Π) , centre du cercle (Γ') circonscrit à ωBM ; quel est l'ensemble des points ω' correspondant aux points ω de $(L) \cap \Omega$?
- b. À l'aide d'une inversion de centre O , déterminer l'ensemble des points H lorsque ω décrit $(L) \cap \Omega$.
- c. Montrer que, quel que soit $\omega \in (L) \cap \Omega$, il existe un point fixe, K , de (Π) tel que (D) passe par K .
 Comment peut-on définir et construire simplement K à partir de (C) et de (L) ?

Partie B

Dans cette seconde partie, le point P est variable sur (C) , mais le cercle (Γ) est le cercle fixe de \mathcal{G} dont le centre ω a pour coordonnées $(2a; 0)$.

1. Soit E et E' les points d'intersection de (C) avec (Γ) , E désignant celui qui a une ordonnée positive. Montrer que les droites (OE) et (OE') ont pour équations respectives

$$y = \sqrt{3}x \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{3}x.$$

2. Soit F et F' les points d'intersection de la polaire (Δ) de P par rapport à (Γ) et des droites (OE) et (OE') respectivement.
 Montrer, géométriquement, que la droite (ωF) est perpendiculaire à (PE) et $(\omega F')$ à (PE') .
 Calculer la mesure de l'angle $(\omega F, \omega F')$ et établir les égalités

$$(\omega O, \omega F') = (FO, Fw) \quad \text{et} \quad OF \cdot OF' = 4a^2.$$

3. Si θ désigne l'angle du vecteur unitaire de Ox et de \vec{OP} ($0 \leq \theta < 2\pi$) et si $r = OP$, les coordonnées de P s'écrivent $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.
 Calculer en fonction de θ les coordonnées de F et de F' , puis celles du milieu, I , du segment FF' .
 Montrer que, lorsque P décrit (Γ) , l'ensemble des points I correspondant, est une hyperbole, dont on précisera les éléments.