Durée : 4 heures

Baccalauréat C Rennes juin 1972

EXERCICE 1

1. Résoudre l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \qquad e^{\frac{1}{x}} - 2 = 0$$

2. x_0 étant la solution de l'équation précédente, on désigne par $\mathbb{R}_1$ l'ensemble des nombres réels positifs, dont on a exclu le nombre x_0. On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}_1$ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0 \quad \text{et} \\ f(x) & = & \dfrac{2}{e^{\frac{1}{x}} - 2}, \text{ pour tout } x \text{ non nul de } \mathbb{R}_1, \end{array}\right.$$

$e^{\frac{1}{x}}$ désignant l'exponentielle de $\dfrac{1}{x}$.

Étudier les variations de la fonction f. La fonction f est-elle continue à droite du point O ?

Construire la courbe représentative (C) de la fonction f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On précisera la demi-tangente à la courbe (C) pour $x = 0$.

EXERCICE 2

En utilisant la théorie des congruences ou l'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, calculer les restes des divisions euclidiennes par 7 des puissances successives de 5 :

$$5^0, \quad 5^1, \quad 5^2, \quad \ldots, \quad 5^n, \quad \ldots$$

avec $n \in \mathbb{N}$.
Quel est le reste de la division euclidienne de l'entier naturel $1\,972^{57}$ par 7.
Déterminer l'ensemble des naturels n tels que $1\,972^n$ soit congru à 4 modulo 7 ?

PROBLÈME

On donne un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ de sens direct d'axes $\overrightarrow{x'\text{O}x}$, $\overrightarrow{y'\text{O}y}$.
À tout point M de ce plan, de coordonnées x, y, on associe le nombre complexe $z = x + \text{i}y$ appelé affixe de ce point.
Dans tout le problème, Q désigne un point variable de l'axe $x'x$, de coordonnées $(q ; 0)$, P un point variable de l'axe $y'y$, de coordonnées $(0 ; p)$ et M un point variable, de coordonnées $(x ; y)$.

1. Dans cette première partie le triplet des points P, Q et M vérifie la propriété $\mathscr{P}_1$:

   le triangle (PMQ) est équilatéral avec $\left(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}}\right) = +\dfrac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$; autrement dit, Q est le transformé de P dans une rotation de centre M d'angle $+\dfrac{\pi}{3}$.

   a. Quelle relation nécessaire et suffisante doivent vérifier les affixes des points M, P et Q pour que la propriété $\mathscr{P}_1$ soit satisfaite ? Montrer que cette relation est équivalente à

$$p = x\sqrt{3} - y \quad \text{et} \quad q = -x + y\sqrt{3}.$$

b. On suppose, en outre, que le segment $[PQ]$ a pour longueur $\sqrt{2}$ $\left(\text{on a donc } \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{2}\right)$.

Quel est alors l'ensemble, (E), des positions de M ? Préciser les éléments de symétrie de (E).

Pour déterminer l'équation réduite de (E), on remplace le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ par le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}\right)$ défini de la façon suivante :

$$\overrightarrow{u'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right).$$

un point M ayant comme coordonnées x et y dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, x' et y' dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}\right)$, établir les formules qui expriment x et y en fonction de x' et de y'. En déduire l'équation de (E) dans le deuxième repère. Préciser la nature de la courbe (E) ; la construire.

2. Dans cette deuxième partie, le triplet de points (P, Q, M) vérifie la propriété $\mathscr{P}_2$:
il existe une rotation de centre M dans laquelle le point P a pour image le point Q.
On pose

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}}\right) = \theta \quad (\text{mod } 2\pi),$$

avec $\theta \in]-\pi ; \pi] - \left\{-\dfrac{\pi}{2} ; +\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

a. On suppose que θ est fixé. Montrer par un raisonnement géométrique que, à tout point M du plan, est associé un, et un seul, couple (P, Q) donc un, et un seul, point Q, tel que la propriété $\mathscr{P}_2$ soit satisfaite.

On définit ainsi une application f_θ de l'ensemble des points M du plan dans l'ensemble des points Q de la droite $x'x$. Définir analytiquement cette application en exprimant q au moyen de x et de y. Montrer que f_θ est une application affine, surjective si $\theta \neq 0$.

Quel est le noyau de l'application linéaire φ_θ associée à f_θ ? Retrouver ce noyau par un raisonnement géométrique.

b. On suppose maintenant que l'on fixe les coordonnées x_0 et y_0 du point M, θ étant variable.

Quelle relation nécessaire et suffisante les normes des vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$ doivent-elles vérifier pour que la propriété $\mathscr{P}_2$ soit satisfaite ?

Traduire analytiquement cette relation. En déduire l'ensemble, (F), des milieux du segment $[PQ]$. Préciser la nature de cet ensemble (F) suivant la position du point donné M dans le plan.