Baccalauréat C Rennes juin 1974

EXERCICE 1

Soit $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'entiers modulo 10.

1. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2}x = \dot{0}$.

2. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{5}x + \dot{2}y & = & \dot{1} \\ \dot{3}x + \dot{2}y & = & \dot{5} \end{array}\right.$$

EXERCICE 2

1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(u) = u - (1+u)\text{Log}\,(1+u)$$

Montrer, en étudiant le sens de variation de φ, que, pour $u > 0$, $\varphi(u) < 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \dfrac{\text{Log}\left(1+x^2\right)}{x^2} \quad \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

3. À l'aide de la fonction φ de la question 1. étudier le sens de variation de f.

4. Étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
On ne demande pas de représentation graphique.

PROBLÈME

Les questions B - 1, et B - 2, sont indépendantes entre elles et indépendantes de la partie A.

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes,.

Partie A

On désigne par P_0 un plan vectoriel euclidien orienté et par $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ une base orthonormée directe de P_0. À tout vecteur $\overrightarrow{V} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ on associe le nombre complexe $z = x + \text{i}y$, appelé affixe de $\overrightarrow{V}$.
On pose $\text{j} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}$.
$\overline{\text{j}}$ désigne le nombre complexe conjugué de j,.
α, β, γ désignent trois nombres réels.

1. Calculer $\text{j} + \overline{\text{j}}$. Vérifier que $\text{j}^2 = \overline{\text{j}}$.
Montrer que $\left(\text{j},\ \overline{\text{j}}\right)$ est une base de $\mathbb{C}$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Quelles sont, dans cette base, les coordonnées de $\alpha + \beta\text{j} + \gamma\overline{\text{j}}$?
Quel est l'ensemble des éléments α, β, γ de $\mathbb{R}^3$ tels que $\alpha + \beta\text{j} + \gamma\overline{\text{j}} = 0$?

2. On pose $z' = \left(\alpha + \beta \mathrm{j} + \gamma \bar{\mathrm{j}}\right) z$, et on désigne par φ l'application qui à tout vecteur $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ de P_0 d'affixe z, associe le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{V}'}$ d'affixe z'.

a. Montrer que φ est involutive si et seulement si φ est l'application identique ou l'homothétie vectorielle de rapport -1.
Montrer que ces deux cas correspondant respectivement aux hypothèses $\beta = \gamma = \alpha - 1$ et $\beta = \gamma = \alpha + 1$.

b. Soit r la rotation vectorielle dont l'angle a pour mesure en radians θ.
Quelles sont les coordonnées, dans la base $\left(\mathrm{j},\ \bar{\mathrm{j}}\right)$ de $\mathbb{C}$, du nombre complexe $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$?
Peut-on choisir α, β, γ pour que l'application φ coincide avec r ?

Partie B

E désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J},\ \overrightarrow{K}\right)$.
Soit Id l'application identique de E et f l'application linéaire de E dans E, telle que :

$$f(\overrightarrow{I}) = \overrightarrow{K}, \quad f(\overrightarrow{J}) = -\overrightarrow{I}, \quad f(\overrightarrow{K}) = -\overrightarrow{J}$$

On rappelle que $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer que f et f^2 sont des rotations vectorielles de même axe D engendré par $\overrightarrow{I} - \overrightarrow{J} + \overrightarrow{K}$.
Montrer que l'angle $\widehat{\theta}$ de chacune des rotations vectorielles f et f^2 vérifie

$$\widehat{\theta} + \widehat{\theta} + \widehat{\theta} = \widehat{0}$$

($\widehat{0}$ désignant l'angle nul).
P désignant le plan vectoriel orthogonal à D, en déduire qu'on peut orienter le plan de façon qu'une mesure en radians de l'angle de f soit $\dfrac{2\pi}{3}$.

2. α, β, γ étant un élément de $\mathbb{R}^3$, on définit l'application $\Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ de E dans E par :

$$\Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \alpha \mathrm{Id} + \beta f + \gamma f^2.$$

On rappelle que, f étant une application linéaire de E dans E, et λ un nombre réel, λf désigne l'application de E dans E définie par :

$$\forall \overrightarrow{\mathrm{V}} \in \mathrm{E},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ :\ (\lambda f)\left(\overrightarrow{\mathrm{V}}\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{\mathrm{V}}\right).$$

$\mathscr{L}(\mathrm{E})$ désignant l'ensemble des applications linéaires de E dans E, on admettra que l'addition dans E et la multiplication par un réel définie ci-dessus donnent à $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des $\Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ avec $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ élément de $\mathbb{R}^3$.
Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
Quelle est la dimension de $\mathscr{F}$? (On pourra calculer $\Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\overrightarrow{I}\right)$.

3. D désigne toujours l'axe des rotations vectorielles f et f^2, et P le plan vectoriel orthogonal à D.

a. Montrer que : $\forall \overrightarrow{\mathrm{V}} \in D, \quad \Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\overrightarrow{\mathrm{V}}\right) = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{V}}$.
et $\forall \overrightarrow{\mathrm{V}} \in \mathrm{P}, \quad \Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\overrightarrow{\mathrm{V}}\right) \in \mathrm{P}$.

b. Le plan P étant orienté de façon à ce qu'une mesure en radians de l'angle de f soit $\dfrac{2\pi}{3}$, on convient désormais de l'identifier au plan P_0 orienté de la partie A.
Montrer que la restriction de $\Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ à P est l'application φ définie dans A - 2.

4. Quel est l'ensemble des éléments (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tels que $\Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ soit : a'fJ'-Y

a. involutive ? Préciser dans chaque cas la nature de l'application et l'ensemble des vecteurs invariants.

b. une rotation vectorielle ?

On pourra dans a. et b. considérer les restrictions de $\Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ à D et à P.