Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1975 Rennes ∾

EXERCICE 1

Résoudre dans le corps des complexes l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^4 - \sqrt{2}.z^2 + 1 = 0$$

EXERCICE 2

Dans une épreuve, l'espace des éventualités Ω comprend 8 éléments notés a, b, c, d, e, f, g, h.
Les ensembles $\mathrm{A} = \{a, c, f, h\}$ et $\mathrm{B} = \{b, c, f, g\}$ sont des évènements.

1. Trouver un ensemble $\mathscr{E}$ de quatre évènements E_1, E_2, E_3, E_4 incompatibles (ou disjoints) deux à deux et tels que :

$$\mathrm{A} = \mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2, \quad \mathrm{B} = \mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_3, \quad \Omega = \mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2 \cup \mathrm{E}_3 \cup \mathrm{E}_4.$$

   On notera désormais $< 1, 4 >$ l'ensemble des entiers $\{1, 2, 3, 4\}$.
2. Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des parties de Ω tel que :
   $\emptyset \in \mathscr{B}, \quad \Omega \in \mathscr{B}, \quad \mathscr{E} \subset \mathscr{B}$
   $i \in < 1, 4 >, \quad [\mathrm{E}_1 \in \mathscr{B}$
   et $\forall i \in < 1, 4 >, \forall j \in < 1, 4 >, i \neq j, \mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2 \in \mathscr{B}$.
   Montrer que $(\Omega,\ \mathscr{B})$ est un espace probabilisable.
3. On pose :

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

   Calculer $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_3)$, $P(E_4)$.
   Montrer que la probabilité P est parfaitement définie sur $(\Omega,\ \mathscr{B})$.
4. Soit X la variable aléatoire définie sur $(\Omega,\ \mathscr{B},\ P)$ telle que :

$$\mathrm{X}(a) = 2, \quad \mathrm{X}(b) = 3, \quad \mathrm{X}(c) = -1, \quad \mathrm{X}(d)$$

   Quelles sont les valeurs $\mathrm{X}(e)$, $\mathrm{X}(f)$, $\mathrm{X}(g)$, $\mathrm{X}(h)$? Quelle est la loi de X ? Quelle est sa fonction de répartition ? Trouver l'espérance mathématique et la variance de X.

PROBLÈME

Les parties A - et B - sont indépendantes

Partie A

Dans cette première partie, E_2 est un plan vectoriel, $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est une base orthonormée de E_2 ; P est un plan affine (euclidien) attaché à E_2.
On dira qu'un endomorphisme φ de E_2 possède la propriété (p) s'il existe Un réel $k \in]0\ ;\ 1[$ tel que :

$$\forall \vec{v} \in \mathrm{E}_2, \qquad \left\|\varphi\left(\vec{v}\right)\right\| \leqslant k\left\|\vec{v}\right\|$$

1. **a.** Donner un exemple simple d'endomorphisme de E_2, autre que l'application nulle possédant la propriétée (p).

   b. Si φ et ψ possèdent la propriété (p), en est-il de même pour $\psi \circ \varphi$?

   L'ensemble des endomorphismes bijectifs de E_2 possédant la propriété (p) est-il un sous-groupe du groupe linéaire de E_2 ?

   c. Montrer que si φ vérifie la propriété (p) et si Id désigne l'application identique de E_2 dans E_2, $\varphi-\text{Id}$ est un endomorphisme bijectif de E_2.

2. **a.** φ étant un endomorphisme de E_2 et k un réel positif, montrer qu'il y a équivalence entre :

   $(i) \quad \forall \overrightarrow{v} \in E_2, \qquad \left\|\varphi\left(\overrightarrow{v}\right)\right\| \leqslant \left\|\overrightarrow{v}\right\|$

   $(ii) \quad \forall \overrightarrow{v} \in E_2, \qquad \left\|\overrightarrow{v}\right\| = 1 \Longrightarrow \left\|\varphi\left(\overrightarrow{v}\right)\right\| \leqslant k\left\|\overrightarrow{v}\right\|$

   b. Soit φ_0 l'endomorphisme de E_2, dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

   On se propose de montrer que φ_0 possède la propriété (p) .

   Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{v(\theta)} = \cos\theta\,\overrightarrow{\imath} + \sin\theta\,\overrightarrow{\jmath}$.

   On pose $F(\theta) = \left\|\varphi_0\left(\overrightarrow{v(\theta)}\right)\right\|^2$.

   Écrire $F(\theta)$ sous la forme : $A + B\sin^2\theta + C\sin\theta\cos\theta$ avec $(A,\ B,\ C) \in \mathbb{R}^3$; en déduire que $F(\theta) < \dfrac{3}{4}$, puis que φ_0 vérifie la propiété (p).

3. Soit f une application affine de P dans P dont l'endomorphisme associé φ possède la propriété (p).

   a. Montrer qu'il existe au plus un point P invariant pour f.

   A étant un point donné de P, montrer qu'il existe dans P un point unique Ω tel que :

   $$\varphi\left(\overrightarrow{\text{A}\Omega}\right) - \overrightarrow{\text{A}\Omega} = \overrightarrow{f(\text{A})\text{A}}$$

   En déduire que Ω est invariant par f et que :

   $$\forall M \in \text{P}, \quad \overrightarrow{\Omega f(M)} = \varphi\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$$

   b. Soit $M_0 \in$ P. On définit la suite de points M_n de P pour $n \geqslant 1$ par $M_n = f\left(M_{n-1}\right)$.

   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left\|\overrightarrow{\Omega M_n}\right\| = 0$

   $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ étant les coordonnées de M_n dans le repère (O, $\mathscr{B}$), que peut-on dire des deux suites de réels $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

   c. Si f_0 est l'application affine de P dans P telle que f_0(O) ait pour coordonnées (1 ; −2) dans le repère (O, $\mathscr{B}$) et que l'endomorphisme associé soit φ_0 dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, trouver les cordonées dans (O, $\mathscr{B}$) du point Ω invariant par f.

   d. Appliquer ce qui précède à l'étude des deux suites de réels $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes, x_0 et y_0 et par les relations de récurrence :

   $$n \geqslant 1 \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_n &=& \dfrac{1}{2}x_{n-1} - \dfrac{1}{2}y_{n-1} + 1 \\ y_n &=& \dfrac{1}{3}x_{n-1} + \dfrac{2}{3}y_{n-1} - 2 \end{array}\right.$$

Partie B

1. **a.** À tout réel x appartenant à l'intervalle $\text{I} = [1\ ;\ +\infty[$ on fait correspondre le nombre $\text{Log}\, x + 2$.

Montrer que $x \in \text{I}$ entraîne $(\text{Log}\, x + 2) \in \text{I}$.

Soit f l'application de I dans I telle que $f(x) = \text{Log}\, x + 2$.

b. On pose $\varphi(x) = f(x) - x$.

Étudier le sens de variation de φ. En déduire que l'équation $f(x) = x$ a une solution unique x_0 dans $\text{I} = [1\ ;\ +\infty[$.

Résoudre dans cet intervalle les inéquations : $f(x) > x$ et $f(x) < x$.

2. **a.** Soit a un réel tel que $a \in]1\ ;\ x_0[$ et soit $\text{J} = [a\ ;\ +\infty[$.

Montrer que $f(\text{J}) \subset \text{J}$ et que : $\forall x \in \text{J}, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{a}$.

b. Montrer que :

$\forall x_1 \in \text{J},\ \forall x_2 \in \text{J}, \quad \left|f(x_1) - f(x_2)\right| \leqslant \dfrac{1}{a}|x_1 - x_2|$.

Pour ce faire on pourra utiliser le fait que si deux fonctions g et h sont intégrables sur $[\alpha\ ;\ \beta]$ où $\alpha < \beta$ et si, $\forall x \in [\alpha\ ;\ \beta]$, $g(x) \leqslant h(x)$, on a :

$$\int_\alpha^\beta g(x)\,\text{d}x \leqslant \int_\alpha^\beta h(x)\,\text{d}x$$

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n > 1, \quad u_n = \text{Log}\, u_{n-1} + 2$$

u_0 étant un réel supérieur ou égal à a, $a \in]1\ ;\ x_0[$.

a. Montrer que si $u_0 > x_0$ tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à x_0, et la suite (u_n) est décroissante.

Cas où $u_0 = x_0$.

b. Montrer que, dans tous les cas, on a :

$$\forall n > 1, \qquad |u_n - x_0| \leqslant \frac{1}{a}|u_{n-1} - x_0|.$$

En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini.