Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Rennes juin 1976 ∾

EXERCICE 1

Le symbole Log désignant la fonction logarithme népérien, soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \mathrm{e}^x - 1 - \left(\mathrm{e}^x - 1\right).\mathrm{Log}\,\left|\mathrm{e}^x - 1\right| \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est continue en 0.

2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ relativement à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Préciser la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation .

$$143x - 100y = 1$$

en remarquant que (7 ; 10) est solution.

2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels p tels que :

$$10^{6p} + 10^{3p} - 2 = 0 \quad (143)$$

PROBLÈME

Soit P un plan affine, $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ un repère de P.

D_1 et D_1' les droites passant par O et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

D_2 et D_2' les droites passant par O et dont les coefficients directeurs respectifs sont les réels distincts m et m'.

On dit qu'une application affine f de P dans P échange deux droites D et D' si et seulement si

$$f(D) = D' \quad \text{et} \quad f\left(D'\right) = D.$$

Partie A

On désigne par :

S_1 la symétrie affine par rapport à D_1 parallèlement à D_1'

S_1' la symétrie affine par rapport à D_1' parallèlement à D_1

S_2 la symétrie affine par rapport à D_2 parallèlement à D_2'

S_2' la symétrie affine par rapport à D_2' parallèlement à D_2

S_O la symétrie de centre O

$\mathrm{I_d}$ l'application identique dans P .

1. Soit E l'ensemble ayant pour éléments : $\mathrm{I_d}$, S_{O}, S_1, S'_1.
   Démontrer que E muni de la loi de composition des applications est un groupe commutatif.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur m et m', pour que la transformée de D_2 par S_1 soit D'_2.
   Montrer qu'alors S_1 et S'_1 échangent D_2 et D'_2 et vérifier (par exemple par un calcul) que S_2 et S'_2 échangent D_1 et D'_1.

Partie B

1. Soit S une symétrie affine échangeant D_1 et D'_1.
   Quelle est l'image de O par S ?
   Démontrer qu'il existe un réel a non nul tel que pour tout point $M(x\ ;\ y)$ de P son image $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ par S soit définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{1}{a}y \\ y' & = & ax \end{array}\right.$$

   Démontrer que S échange D_2 et D'_2 si et seulement si : $mm' = a^2$.
2. Montrer que si m et m' sont non nuls et de même signe, il existe deux symétries affines et deux seulement, L et L', qui échangent D_1 et D'_1 d'une part, D_2 et D'_2 d'autre part.
   Montrer que : $\quad L \circ L' = L' \circ L = S_{\mathrm{O}}$.

Partie C

On suppose dans cette partie que : $m' > m > 0$
On désigne toujours par L et L' les symétries échangeant D_1 et D'_1 d'une part, D_2 et D'_2 d'autre part.

1. En utilisant B 2. et un repère convenable, démontrer qu'il existe deux symétries affines et deux seulement, Σ et Σ', qui échangent D_1 et D_2 d'une part, D'_1 et D'_2 d'autre part.
   On appellera Δ l'axe de $\sum$, Δ' l'axe de $\sum'$.
2. On pose :

$$T = L \circ \Sigma \circ L$$

   a. Démontrer que T est la symétrie par rapport à la droite $L(\Delta)$ (transformée de Δ par L) parallèlement à la droite $L\left(\Delta'\right)$ (transformée de Δ' par L).
   b. Quelles sont les images par T des droites D_1 et D'_1 ?
   c. Démontrer que L échange Δ et Δ'.