∽ Baccalauréat C Rennes juin 1981 ∾

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $23X - 17Y = 6$.
2. Déduire de l'étude précédente les entiers naturels A inférieurs à 1 000 tels que dans la division euclidienne de A par 23, le reste soit 2, et dans celle de A par 17 le reste soit 8.

EXERCICE 2

1. Montrer que si x est un réel strictement positif

$$1 + \frac{1}{x} > \mathrm{e}^{-x}.$$

   Montrer que si x est un réel strictement négatif $1 + \dfrac{1}{x} < \mathrm{e}^{-x}$.

   (On pourra comparer $1 + \dfrac{1}{x}$ et e^{-x} au nombre 1).
2. Soit f la fonction numérique définie par

$$f(x) = x + \ln|x| + \mathrm{e}^{-x}.$$

   (ln désigne la fonction logarithme népérien).
   Étudier f, (ne pas oublier l'étude des limites quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et construire sa courbe représentative.

PROBLÈME

$\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est un repère orthonormé direct d'un plan affine euclidien P. Soit P le plan vectoriel associé à P. On appelle $\mathscr{A}$ l'ensemble des applications affines de P transformant toute droite D de P en une droite D' orthogonale à D.

Partie A

1. Vérifier que la rotation R de centre O dont l'angle a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$ radian est un élément de $\mathscr{A}$.
2. On appelle φ l'endomorphisme du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ associé à l'application affine.
   Montrer que f appartient à $\mathscr{A}$ si, et seulement si, pour tout vecteur non nul $\overrightarrow{u}$: $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{u} \cdot \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = 0$.
3. Montrer que si f appartient à $\mathscr{A}$, la matrice de φ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ où λ est un réel non nul.
   En déduire que f est une similitude directe, en préciser le rapport et l'angle suivant les valeurs de λ.
4. En déduire quel est l'ensemble $\mathscr{A}$.

Partie B

Dans cette partie, on désigne par $\mathscr{B}$ l'ensemble des applications (non supposées affines) de P dans P, transformant toute droite D de P en une droite D$'$ de P orthogonale à D. On se propose de montrer qu'une telle application est nécessairement affine et donc que $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

1. Soit f_1 un élément de $\mathscr{B}$.

a. Montrer qu'il existe au moins un couple de points (A, B) tel que

$$\mathrm{A} \neq \mathrm{B} \quad et \quad f_1(\mathrm{A}) \neq f_1(\mathrm{B})$$

On notera $\mathrm{A}' = f_1(\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}' = f_1(\mathrm{B})$.

b. On appelle M un point de P n'appartenant pas à la droite AB. Montrer que $M' = f_1(M)$ peut être obtenu comme intersection de deux droites que l'on précisera.

En déduire une construction de M'.

2. Soit f_2 la similitude plane directe transformant A en A$'$ et B en B$'$ (c'est-à-dire que $f_2(\mathrm{A}) = f_1(\mathrm{A})$ et $f_2(\mathrm{B}) = f_1(\mathrm{B})$.

a. Donner une mesure de l'angle de f_2.

b. Si M n'est pas un point de la droite AB, montrer que $f_2(M) = f_1(M)$.

c. Si M est un point de la droite AB, indiquer une construction de $f_1(M)$. (On pourra introduire un point C n'appartenant pas à la droite AB).

d. En déduire que $f_1 = f_2$ On a ainsi prouvé que $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

Partie C

R désigne toujours la rotation de centre O dont l'angle a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$ radian. La loi $\circ$ est la composition des deux applications.

1. Montrer qu'on définit une loi interne, notée $\star$, sur $\mathscr{A}$ en posant

$$\forall f \in \mathscr{A}, \forall g \in \mathscr{A}, \quad f \star g = f \circ R \circ g.$$

2. Montrer qu'il existe dans $\mathscr{A}$ un élément e, neutre pour la loi $\star$.

3. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des homothéties de rapport non nul et des translations. Montrer que pour tout h appartenant à $\mathscr{D}$, e $\circ h$ appartient à $\mathscr{A}$.

Soit L l'application de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{A}$ qui à h associe e $\circ h$. Montrer que L est un isomorphisme du groupe $(\mathscr{D}, \circ)$ sur $(\mathscr{A}, \star)$.