Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1982 Rennes

EXERCICE 1 **4 points**

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$$

(ln désigne le logarithme népérien).

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan (P) rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
2. Soit λ un réel supérieur à 1 et

$$\Delta_k = \left\{M(x~;~y) \left| \begin{array}{ccccc} 1 & \leqslant & x & \leqslant & \lambda \\ 1 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array} \right. \right\}$$

   Calculer l'aire $\mathscr{A}\left(\Delta_k\right)$ de Δ_k.
   Étudier la limite de $\mathscr{A}\left(\Delta_k\right)$ quand λ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Étudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 7^npar 10.
2. Dans le système de numération décimale déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le chiffre des unités de l'entier $A(n)$ défini par

$$A(n) = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n.$$

PROBLÈME **12 points**

Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel euclidien muni de la base orthonormée $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, P le plan affine euclidien muni du repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, (Δ) la droite affine d'équation $x - 2y = 0$, (D) la droite vectorielle de base $\vec{\jmath}$.
Dans toute la suite du problème S désigne la symétrie affine par rapport à la droite (Δ), suivant la droite vectorielle (D) ; σ est l'endomorphisme associé à S.
On appelle $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications affines bijectives f de P dans P telles que $f \circ S = S \circ f$.

Partie A

1. Démontrer que $\mathscr{F}$ n'est pas l'ensemble vide et que $\mathscr{F}$ est stable pour la loi de composition des applications, notée $\circ$.

   Montrer que $(\mathscr{F},~\circ)$ est un groupe.
2. Au point $M(x~;~y)$, la symétrie affine S associe un point $M_0\left(x_0~;~y_0\right)$. Donner x_0 et y_0 en fonction de x et y.

3. Soit g l'application de P dans P qui au point $M(x\,;\,y)$ associe le point $M'(x'\,;\,y')$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& -\dfrac{1}{2}x+1\\ y' &=& -\dfrac{3}{4}x+y+\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Montrer que $g \in \mathscr{F}$.

4. Soit f une application affine bijective de P dans P d'endomorphisme associé φ.
Démontrer que f est élément de $\mathscr{F}$ si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont réalisées simultanément :

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) \in (\Delta)\\ \exists a \in \mathbb{R}^\star,\quad \varphi\left(2\vec{\imath}+\vec{\jmath}\right) = a\left(2\vec{\imath}+\vec{\jmath}\right) \exists b \in \mathbb{R}^\star,\quad \varphi\left(\vec{\jmath}\right) = b\vec{\jmath}\end{array}\right.$$

Écrire alors en fonction de a et b la matrice M de φ dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Vérifier ce résultat dans le cas particulier étudié au 3.

5. **a.** Préciser les couples $(a,\ b)$ pour que f soit une homothétie (caractériser géométriquement f).

b. Préciser les couples $(a,\ b)$ pour que f soit une translation. Caractériser f.

6. On appelle $\mathscr{F}_1$ le sous-ensemble des éléments de $\mathscr{F}$ dont l'endomorphisme associé φ vérifie $\varphi\left(\vec{\jmath}\right) = \vec{\jmath}$.

a. Montrer que $(\mathscr{F}_1,\ \circ)$ est un groupe.

b. Soit f_1 un élément de $\mathscr{F}_1$.
Démontrer que $M(x\,;\,y)$ a pour image $f_1(M) = M'$ de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& ax+2\alpha\\ y' &=& \dfrac{a-1}{2}x+y+\alpha\end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} a \in \mathbb{R}^\star\\ \alpha \in \mathbb{R}\end{array}\right.$$

Quel est l'ensemble des points invariants par f_1 ? (On discutera selon les valeurs de a et de α).

c. Vérifier que l'application g proposée au 3. est un élément de $\mathscr{F}_1$. On note $M' = g(M)$.
Déterminer l'ensemble (E) des points invariants par g. Si M n'est pas invariant, la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on précisera.
Calculer alors les coordonnées du point M_1 commun à la droite (MM') et à (E). Comparer $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{M_1M}$; en déduire une construction géométrique de M'.

Partie B

1. Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x.$$

Étudier et représenter F dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de F.

2. **a.** Soit f_1 un élément quelconque de $\mathscr{F}_1$. Déterminer une équation de l'image de (C) par f_1.

b. Soit $(m,\ p) \in \mathbb{R}^{\star} \times \mathbb{R}$ et $\left(C_{m,\ p}\right)$ la courbe d'équation

$$y = \mathrm{e}^{mx+p} + \frac{1}{2}x$$

dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Montrer que $\left(C_{m,\ p}\right)$ est l'image de (C) par une application appartenant à $\mathscr{F}_1$.

3. Soit Γ la courbe d'équation

$$y = \mathrm{e}^{-2x+2} + \frac{1}{2}x.$$

En utilisant les résultats de la partie A, reconnaître l'application élément de $\mathscr{F}_1$ qui transforme (C) en Γ.

Dessiner Γ à partir du tracé de (C).

4. Construire l'image $\left(C'\right)$ de (C) par $g \circ S$.

5. $\left(m',\ p'\right) \in \mathbb{R}^{\star} \times \mathbb{R}$, montrer, en utilisant A 6. a. que toute autre courbe $\left(C_{m',\ p'}\right)$ est l'image de la courbe $\left(C_{m,\ p}\right)$ par une application appartenant à $\mathscr{F}_1$.