Baccalauréat mathématiques élémentaires Rennes juin 1967

Sujet de secours

I

Soit les nombres complexes

$$z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = 1 - \mathrm{i}.$$

$\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right.$ et $1 - \mathrm{i}$ sont les formes algébriques de z_1 et $\left.z_2\right)$.

1. Calculer les modules et les arguments de z_1 et z_2.
2. Calculer le rapport $\dfrac{z_1}{z_2}$;
   a. à l'aide des formes algébriques de z_1 et z_2 ;
   b. à l'aide des modules et arguments de z_1 et z_2.
3. En déduire $\cos \dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{5\pi}{12}$.

II.

Partie A

Soit, dans un plan, deux points fixes, A et B.
À tout point M du plan, distinct de A et de B, on associe le point M′ de la manière suivante :
M′est le point diamétralement opposé à M sur le cercle circonscrit au triangle MAB.

1. Trouver l'ensemble, (E′), des points M′ lorsque l'ensemble (E) des points M est :
   a. une droite passant par A (ou par B) ;
   b. une droite perpendiculaire à AB.
2. On suppose, dans cette question, que l'ensemble, (E), des points M est un cercle (O), de centre O, passant par A et B.
   a. P étant l'intersection de MA et BM′, P′ étant l'intersection de M′A et MB, démontrer que P et P′ sont conjugués par rapport au cercle (O).
   b. En déduire l'ensemble des points P et l'ensemble des points P′.
   c. Quel est l'orthocentre du triangle SPP′, S étant l'intersection des droites AB et MM′ ?

Partie B

Soit deux cercles orthogonaux, (O) et (O′), se coupant en A et B. P étant un point variable de (O′), les droites PA et PB recoupent le cercle (O) respectivement en M et M′.

1. Démontrer que MM′ passe par un point fixe.
2. P′ étant l'orthocentre du triangle PMM′, quel est l'ensemble des points P′ ?