**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat C Rennes septembre 1971 ∽

**EXERCICE 1**

À tout couple $(x,\ n)$ d'entiers $x$ et $n$ supérieurs ou égaux à deux, on associe le nombre entier, noté $a(x,\ n)$, qui, dans le système de numération de base $x$, s'écrit avec $n$ chiffres dont le premier et le dernier sont des 1 et les autres (s'il y en a) des 0.
Ainsi, $a$(trois, deux) s'écrit 11 en base « trois », c'est l'entier « quatre » ; $a$(trois, trois) s'écrit 101 en base « trois », c'est l'entier « dix ».

1. Montrer que, quelle que soit la base $x$, $a(x,\ n)$ est divisible par $a(x$, deux) si $n$ est pair et ne l'est pas si $n$ est impair.
2. À quelles conditions doivent satisfaire les entiers $x$ et $n$ pour que le nombre $a(x,\ n)$ soit divisible par le nombre « trois » ?

**EXERCICE 2**

Dans un plan rapporté à un système orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, la position d'un point mobile à l'instant $t$, $M(t)$ est définie par ses coordonnées

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \text{e}^{\sin t},\\ y(t) & = & \text{e}^{\cos t},\end{array}\right.$$

pour $t$ variant de 0 à $2\pi$.

1. En se déplaçant sur sa trajectoire, le point mobile rencontre la droite d'équation $y = 1$ en quatre points A, B, C et D, dont on déterminera les coordonnées.
   Quelles sont les dates de passage en chacun des points A, B, C et D ?
2. Déterminer le vecteur vitesse du point mobile aux différentes dates de passage en chacun des points A, B, C et D.

**PROBLÈME**

1. $\lambda$ désignant un nombre réel donné non nul, on considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, la transformation ponctuelle $T_\lambda$ qui fait correspondre au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ le point $M$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$, telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x\\ y' & = & x^2+\lambda y.\end{array}\right.$$

   **a.** Montrer que $T_\lambda$ est une bijection du plan sur lui-même.
   **b.** Trouver les points doubles de $T_\lambda$.
   **c.** Quelle est la transformée par $T_\lambda$ d'une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ ?

2. **a.** Soit $(\Gamma_1)$ et $(\Gamma_2)$ les courbes d'équations respectives

$$y = f_1(x) = x^2 + 2|x-1|$$

et

$$y = f_2(x) = x^2 + 2\mathrm{e}^x.$$

Étudier les variations des fonctions $f_1$ et $f_2$ et construire les courbes $(\Gamma_1)$ et $(\Gamma_2)$
(On montrera que l'équation $f_2'(x) = 0$ a une racine, dont on donnera une valeur approchée.)

**b.** Soit $A$ l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$ dont l'abscisse $x$ est comprise entre $-1$ et 1 et dont l'ordonnée $y$ est comprise entre $f_1(x)$ et $f_2(x)$. Calculer l'aire de $A$.

**3.** **a.** $(\Gamma_1)$ et $(\Gamma_2)$ sont les images par $T_2$ de deux courbes $(C_1)$ et $(C_2)$ du plan. Quelles sont les équations de $(C_1)$ et $(C_2)$ :

$$y = g_1(x) \quad \text{et} \quad y = g_2(x)\,?$$

**b.** Soit $g$ la fonction définie par
$g(x) = g_1(x)$ pour tout réel $x$ pour lequel $g_1(x) \geqslant g_2(x)$,
$g(x) = g_2(x)$ pour tout réel $x$ pour lequel $g_1(x) < g_2(x)$
et soit $(C)$ la courbe d'équation $y = g(x)$.
Quelle est la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $y = f(x)$ soit l'équation de la courbe $(\Gamma)$ transformée de $(C)$ par $T_2$ ?
Montrer que $f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la primitive $\Phi$ de $f$ telle que $\Phi(1) = 0$.
En déduire l'aire du domaine limité par l'axe $x'\mathrm{O}x$, les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$ et la courbe $(\Gamma)$.