∽ Baccalauréat C Rennes septembre 1972 ∽

EXERCICE 1

1. Écrire la table de multiplication de l'ensemble

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}.$$

2. En déduire les solutions des équations suivantes :

$$\begin{array}{l} x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} : \quad \dot{3}x + \dot{4} = \dot{0}, \\ x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} : \quad \dot{2}x + \dot{1} = \dot{0}, \end{array}$$

puis celle du système

$$(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} : \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{3}x + \dot{4}y & = & \dot{1} \\ \dot{2}x + \dot{3}y & = & \dot{2} \end{array} \right.$$

3. Montrer que l'équation

$$x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} : \quad \dot{1}x^2 + \dot{1}x + \dot{1} = \dot{0}$$

n'a pas de solution.

EXERCICE 2

Un point M mobile dans un plan affine euclidien (II) rapporté au repère orthonormé (0, t, i) a pour coordonnées

$$x = t - 1 \quad \text{et} \quad y = t\mathrm{e}^{-t},$$

t prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération du point M à chaque instant t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Déterminer par son équation dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ la trajectoire (C) du point mobile M. Construire la courbe (C).

3. Indiquer les intervalles de temps et les arcs de la trajectoire (C) correspondant à un mouvement accéléré ou retardé.

PROBLÈME

On désigne par (E) un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On considère un plan affine (P) associé à (E), un point O fixe de (P) et le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$. À tout point M de (P) de coordonnées $(x\ ;\ y)$ on fait correspondre le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, dit affixe de M.

1. On définit une application f de (P) dans (P) qui au point $M(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcr} x' &=& x - y\sqrt{3},\\ y' &=& -x\sqrt{3} - y.\end{array}\right.$$

Montrer que f est une application affine bijective. Écrire la matrice sur la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ de l'application linéaire F associée à f.

2. Montrer que l'affixe z' du point $M' = f(M)$ est liée à l'affixe z de M par la relation $z' = az$, dans laquelle a est un nombre complexe fixe, dont on déterminera le module et l'argument. En déduire que la transformation f est la composée d'une symétrie par rapport à l'axe $x'x$ par une similitude de centre O, que l'on précisera.

3. **a.** Écrire la matrice, S, relativement à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ de la symétrie vectorielle orthogonale s par rapport à la droite vectorielle de vecteur de base $\overrightarrow{\imath}$; écrire la matrice, R, de la rotation vectorielle, r, dont l'angle, a pour mesure θ ; écrire la matrice, H, de l'homothétie vectorielle, h, de rapport λ ; écrire enfin la matrice de l'application $h \circ r \circ s$ de (E) dans (E) relativement à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

b. Retrouver, dans le cas où $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$,les résultats de la question 2.

4. On considère l'application linéaire, g, de (E) dans (E) dont la matrice relative à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$$

.

Déterminer l'ensemble (D) des vecteurs invariants par g. Montrer que (D) est une droite vectorielle. Déterminer un vecteur de base de (D).

Déterminer l'ensemble (Δ) des vecteurs $\overrightarrow{v}$ de (E) transformés par g en leurs opposés, c'est-à-dire tels que $g\left(\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{v}$. Montrer que (Δ) est une droite perpendiculaire à (D).

Reconnaître la nature géométrique de la transformation g, comparer le résultat avec celui de la question précédente.

5. Soit $\left(\gamma'\right)$ la courbe du plan (P) qui, dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ a pour équation

$$7x'^2 - 6x'y'\sqrt{3} + 13y'^2 - 16 = 0.$$

Montrer que $\left(\gamma'\right)$ est l'image par f d'une courbe (γ), dont on donnera une équation cartésienne dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Préciser la nature de (γ) et déterminer ses éléments géométriques remarquables. Répondre alors aux mêmes questions concernant $\left(\gamma'\right)$.