**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat C Rennes septembre 1975 ∾

**EXERCICE 1**

Le plan affine euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On considère le point A de coordonnées (1 ; 0) et le point B de coordonnées (0 ; 1).

Soit $S_1$ la similitude plane directe de centre A, d'angle dont une détermination est $\dfrac{2\pi}{3}$ et de rapport 2.

Soit $S_2$ la similitude plane directe de centre B, d'angle dont une détermination est $\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

1. Quelle est la nature de $T = S_2 \circ S_1$ ?
2. Soit $M$ un point de coordonnées $(x\,;\,y)$, $M'$ le transformé de $M$ par $T$.
   Exprimer les coordonnées $x'$ et $y'$ de $M'$ en fonction de celles de $M$.

**EXERCICE 2**

1. Montrer que l'équation :

$$7x + 11y = 1 \qquad (1)$$

   admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation :

$$\dot{7}\,.\,x = \dot{1} \qquad (2)$$

3. Donner toutes les solutions de l'équation (1).

**PROBLÈME**

Soit $\Omega$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et $E$ l'ensemble des fonctions $f$ de $\Omega$ possédant la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'''(x) - 3f''(x) + 3f'(x) - f(x) = 0 \quad (1)$$

1. Montrer que $\Omega$, muni de l'addition des fonctions et de la loi de multiplication des fonctions par un nombre réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que la fonction $f_1$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \text{e}^x$$

   est élément de E.
   Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\Omega$.
2. A tout élément $f$ de $E$ on associe la fonction $g$ de $\Omega$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \text{e}^{-x} f(x).$$

   Montrer que $g$ vérifie la propriété : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'''(x) = 0$.
   Réciproquement, montrer qu'à toute fonction $g$ de $\Omega$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'''(x) = 0$$

on peut associer une fonction $f$ de $E$.

En déduire que :

$$E = \left\{f / \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(a + bx + cx^2\right)\mathrm{e}^x, \quad (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

**3.** On appelle $f_1$, $f_2$, $f_3$ les trois fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \mathrm{e}^x, \quad f2(x) = x\mathrm{e}^x, \quad f3(x) = x^2\mathrm{e}^x.$$

Montrer que $\mathscr{B} = \left(f_1,\ f_2,\ f_3\right)$ est une base de $E$. Etudier les fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$ et tracer dans un même repère leurs courbes représentatives respectives $C_1$, $C_2$, $C_3$.

**4. a.** Montrer que si $f$ est un élément quelconque de $E$, la fonction dérivée de $f$, $f'$, est aussi élément de $E$.

En déduire que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^\star$ ($n$ entier naturel non nul), la dérivée d'ordre $n$ de $f$, que l'on note $f^{(n)}$, est élément de $E$.

Soit $D$ l'application de E dans E définie par :

$$\forall f \in E, \quad D(f) = f'$$

Montrer que $D$ est linéaire. Exprimer les coordonnées de $f'$ dans la base :n en fonction de celles de $f$. En déduire que $D$ est bijective. Déterminer $D^{-1}$ puis une primitive de $f$.

$\lambda$ désignant un réel négatif, calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine limité par les courbes $C_2$, $C_3$ et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 0$. Cette aire a-t-elle une limite quand $\lambda$ tend vers $-\infty$?

**b.** Soit $F$ le plan vectoriel de $E$, de base $\mathscr{B}' = \left(f_1,\ f_2\right)$. Montrer que $\forall h \in F, \quad D(h) \in F$.

Soit $D^\star$ l'application de $F$ dans $F$ définie par :

$$\forall h \in F, \quad D^\star(h) = D(h)$$

$D^\star$ est linéaire. Quelle est la matrice $\Delta$, de $D^\star$ dans $\mathscr{B}'$.

Calculer $\Delta^2 = \Delta \times \Delta$, $\Delta^3 = \Delta^2 \times \Delta$, puis $\Delta^n$ ($n$ désignera un entier naturel supérieur ou égal à 3).

(On rappelle que, $n \geqslant 2, \quad \Delta^n = \Delta^{n-1} \times \Delta$.

Soit $h$ un élément de $F$ de coordonnées $(a\ ;\ b)$ dans $\mathscr{B}'$.

Montrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, la fonction dérivée $n$-ième de $h$, $h^{(n)}$, est élément de $F$ et calculer les coordonnées $(a_n\ ;\ b_n)$ de $h^{(n)}$ en fonction de $a$ et $b$.

**5. a.** $\alpha$ désignant un réel donné, à toute fonction réelle $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$, on fait correspondre la fonction $\varphi_\alpha$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\alpha(x) = \varphi(x + \alpha).$$

Montrer que si $\varphi$ est élément de $E$, $\varphi_\alpha$ est alors aussi élément de $E$.

À tout nombre réel $\alpha$, on associe alors l'application $T_\alpha$ de $E$ dans $E$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad T_\alpha(f) = f_\alpha.$$

Montrer que $T_\alpha$ est linéaire.

$E$ étant rapporté à la base $\mathscr{B}$, exprimer les coordonnées de $T_\alpha(f)$ en fonction de celles de $f$.

En déduire que $T_\alpha$ est bijective.

**b.** Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des applications $T_\alpha(f)$ lorsque $\alpha$ décrit $\mathbb{R}$.
Montrer que : $T_\alpha(f) = T_\beta(f) \iff \alpha = \beta$.
$\alpha$ et $\beta$ désignant deux réels quelconques, montrer que :

$$T_\alpha \circ T_\beta \in \mathscr{T};$$

En déduire que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{T}$ qui, à $\alpha$, fait correspondre $T_\alpha$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},\ +)$ dans $(\mathscr{T},\ \circ)$.
On pose $T_\alpha^0 = \mathrm{Id}_E$ ($\mathrm{Id}_E$ désigne l'application identique de $E$ dans $E$) et

$$\forall n \geqslant 1, \quad T_\alpha^n = T_\alpha^{n-1} \circ T_\alpha.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_\alpha^n = T_{n\alpha}$.
Calculer dans la base $\mathscr{B}$ les coordonnées de $T_\alpha^n(f)$ en fonction de celles de $f$.

**c.** Montrer que : $\forall h \in F, \quad T_\alpha(h) \in F$.
Soit $T_\alpha^\star$ l'application de $F$ dans $F$ définie par :

$$\forall h \in F, \quad T_\alpha^\star(h) = T_\alpha(h)$$

Montrer que $T_\alpha$ est une application linéaire bijective.
On pose $T_\alpha^{\star n}(h) = \lambda_n f_1 + \mu_b f_2$.
Calculer les coordonnées de $h$ dans la base $\mathscr{B}'$ en fonction de $\lambda_n$ et $\mu_n$.

**N. B.** : Le candidat pourra considérer comme connue la propriété suivante :
L'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni des lois + et . est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.