

♣ Baccalauréat C Rennes septembre 1977 ♣

EXERCICE 1

3,5 POINTS

Une épreuve consiste à tirer au hasard une carte d'un jeu ordinaire (jeu de piquet) de 32 cartes; on suppose que toutes les cartes ont la même chance d'être tirées. On associe à cette épreuve un espace (Ω, \mathcal{B}, P) comprenant 32 éventualités, tel que $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ et dans lequel tous les singletons sont équiprobables.

1. X est une variable aléatoire numérique définie sur Ω qui ne peut prendre que les 4 valeurs : 0, 1, 2 ou 3.

On sait que :

il existe dans (Ω, \mathcal{B}, P) deux évènements A et B tels que :

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$A = \{\omega \mid X(\omega) > 1\}$ si $\omega \in B$, si $\omega \in B^c$, $X(\omega) \in \{1, 3\}$.

$$P(X = 1) \leq P(X = 2)$$

$$P(X = 0) = \frac{3}{8}.$$

Montrer que ces données suffisent pour connaître la loi de probabilité de X et déterminer cette loi en calculant pour chaque valeur k que peut prendre X la probabilité $P_k = P(X = k)$.

2. On sait également que X ne dépend que de la valeur de la carte tirée (as, roi, dame, valet, dix, neuf, huit, sept) et non de sa couleur (trèfle, carreau, coeur, pique); qu'elle prend la valeur 3 si l'on tire une figure (roi, dame, valet); que sa valeur est la même pour tous les tirages possibles d'une basse carte (sept, huit, neuf); enfin que la valeur prise par X lorsqu'on tire l'as de pique est strictement supérieure à la valeur correspondant au tirage d'un dix, d'un neuf, d'un huit ou d'un sept. Quels sont les évènements A et B ?

EXERCICE 2

2,5 POINTS

On pose :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx, \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2 \sin x} dx, \quad I_1 + I = I_2$$

1. Calculer I_2 ;
2. Calculer I_1 ;
3. En déduire I .

PROBLÈME

14 POINTS

P est un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct.

À tout point m de coordonnées $(x; y)$ dans ce repère est associé le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe du point m . On appelle A et B les points de P d'affixes respectives i et $-i$.

Partie A

1. On considère la relation de \mathbb{C} vers \mathbb{C} qui associe au complexe z le complexe $\frac{z-i}{z+i}$. Montrer que tout complexe distinct de $-i$ (c'est-à-dire tout élément de $\mathbb{C} - \{-i\}$) a une image et que toute image est un complexe distinct de 1 (c'est-à-dire un élément de $\mathbb{C} - \{1\}$).

2. Soit φ l'application de $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C} - \{1\}$ définie par :

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

Montrer que φ est bijective.

3. Quel est le sous-ensemble P_1 de P des points m dont l'affixe z vérifie la propriété $|\varphi(z)| < 1$?
 4. k étant un nombre réel donné vérifiant $0 \leq k < 1$, montrer que le sous-ensemble P_2 de P_1 des points m dont l'affixe z vérifie la propriété $|\varphi(z)| = k$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Partie B

On désigne par U l'ensemble des nombres complexes de module 1.

À tout élément $u = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) de cet ensemble, on fait correspondre la fonction f_u associant à tout point m d'affixe z de P_1 le point M de P_1 d'affixe Z telle que :

$$Z = \frac{az - b}{bz + a}.$$

- Vérifier que, quel que soit l'élément u de U , f_u est définie en tout point de P_1 , que c'est une bijection de P_1 sur P_1 . Montrer qu'il existe un point de P_1 , et un seul, qui soit invariant par chaque f_u quel que soit $u \in U$. On désigne l'ensemble des bijections f_u par E .
- Soit g l'application de U dans E définie par $g(u) = f_u$.
Montrer que tout élément de E est l'image par g de deux éléments de U .
Si $g(u) = g(u')$, $u' \neq u$, quelle relation existe-t-il entre u et u' ?
- Rappeler la structure de (U, \times) (c'est-à-dire U muni de la multiplication des complexes).
Étant donné un élément de E correspondant à u , élément de U : f_u montrer que la bijection réciproque f_u^{-1} est un élément de E . Quels sont les éléments de U qui correspondent à cette bijection réciproque f_u^{-1} (c'est-à-dire quels sont les éléments v de U tels que $g(v) = f^{-1}$?
Montrer que l'identité de P_1 est élément de E . Quels sont les éléments correspondants de U ?
 u_1 et u_2 étant deux éléments de U , montrer que $f_{u_2} \circ f_{u_1}$ est élément de E .
En déduire la structure de l'ensemble E muni de la loi de composition des applications : (E, \circ) .
Que peut-on conclure de cette étude pour l'application g définie à la question précédente ?
- Dans cette question, on se place dans le cas $u = i$.
 Γ étant le cercle de centre O et de rayon 1, on pose $\Gamma_1 = \Gamma \cap P_1$. Quelle est l'image de Γ_1 par f_i ?
À quelle transformation ponctuelle simple se réduit la restriction de f_i à Γ_1 .
 D étant la droite d'équation $x + py = 0$ ($p \in \mathbb{R}$), on pose $D_1 = D \cap P_1$. Quelle est l'image de D_1 par f_i ?

Partie C

On définit dans l'ensemble P_1 la relation binaire \mathcal{R} de la manière suivante :

M_1 et M_2 étant deux points quelconques de P_1 , $M_{11}\mathcal{R}M_{22}$ signifie qu'il existe une bijection f_u telle que : $M_2 = f_u(M_1)$.

- Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence dans P_1 .
- On se propose de définir les classes d'équivalence déterminées dans P_1 par la relation \mathcal{R} .
 m_0 étant un point quelconque de P_1 , on désigne par $C(m_0)$ sa classe d'équivalence.
Soit z_0 l'affixe de m_0 et z l'affixe d'un point quelconque M de $C(m_0)$.
Établir que z vérifie une relation de la forme $\varphi(z) = \alpha\varphi(z_0)$ où α est un élément de U . Réciproquement, montrer que tout point M de P_1 d'affixe z vérifiant une relation de la forme $\varphi(z) = \alpha\varphi(z_0)$ où $|\alpha| = 1$ appartient à $C(m_0)$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire $|\varphi(z)|$ pour que le point M d'affixe z appartienne à $C(m_0)$.
Déterminer la classe d'équivalence du point m_0 .
Quelle est, en particulier, la classe d'équivalence du point A ?