Baccalauréat C Rouen septembre 1980

EXERCICE 1

Soit f la fonction d'une variable réelle x définie par

$$f(x) = x\text{Log}\,(1+x).$$

La notation Log désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
   La fonction f est-elle deux fois dérivable sur $\mathcal{D}$? (le candidat devra justifier clairement sa réponse).
   — Calculer f' et f'', dérivées première et seconde de f.
   — Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire celui de $f'(x)$.
   — Étudier alors les variations de f et construire sa représentation graphique en rapportant le plan P à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
2. Calculer l'aire de l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x~;~y)$ de P défini par

$$\mathcal{E} = \{M(x~;~y) \in \text{P} | 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

   On pourra effectuer une intégration par parties puis montrer qu'il existe trois réels a, b, c, tels que

$$(\forall x \in \mathbb{R} - \{-, 1\}, \quad \left(\frac{x^2}{1+x} = ax + b + \frac{c}{x+1}\right).$$

EXERCICE 2

Dans un jeu de 32 cartes il y a douze « figures » (valets, dames et rois) et vingt « nombres » (1, 7, 8, 9, 10).

1. On appelle épreuve le tirage d'une carte du jeu. On suppose que toutes les cartes ont la même chance d'être tirées. Dans un espace probabilisé que l'on précisera, calculer la probabilité (P) pour que la carte tirée soit une figure.
2. On réalise trois épreuves successives, en remettant à chaque fois la carte tirée dans le jeu, et en battant les cartes avant de procéder au tirage suivant. Préciser le nouvel espace probabilisé. Calculer les probabilités pour que lors des trois épreuves on ait tiré :
   a. trois fois la même carte ;
   b. trois cartes distinctes deux à deux ;
   c. deux fois (et 2 fois seulement) la même carte.
3. On réalise $N = 1\,600$ épreuves successives ; on admet que les épreuves sont indépendantes. On appelle X le nombre de fois qu'une figure a été tirée.
   Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
   On admettra que son espérance mathématique est donnée par $E(X) = m = Np$ et sa variance par $V(X) = Np(1-p)$.
   À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, calculer un majorant de la probabilité d'avoir au moins autant de figures que de nombres lors des 1 600 épreuves.

N. B. - On rappelle que si X est une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et d'écart type σ, pour tout λ réel positif,

$$\text{Prob.}\,[|X - E(X)| \geqslant \lambda\sigma] \leqslant \frac{1}{\lambda^2}.$$

[On cherchera un nombre $\mathcal{E}$ tel que l'évènement $[X \geqslant 800]$ soit inclus dans l'évènement $[|X - m| \geqslant \mathcal{E}]$.

PROBLÈME

E désigne le plan vectoriel de base $\text{B} = \left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$. $\mathcal{L}(\text{E})$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.
On rappelle :

— que $(\mathcal{L}(\text{E}), +, .)$ muni de l'addition des endomorphismes et de la multiplication d'un endomorphisme par un nombre réel est un espace vectoriel ;

— $(\mathcal{L}(\text{E}), +, \circ)$ muni de l'addition et de la composition des endomorphismes est un anneau.

I et f sont les endomorphismes de E définis par

$$\left\{\begin{array}{rcl} I\left(\vec{\imath}\right) & = & \vec{\imath} \\ I\left(\vec{\jmath}\right) & = & \vec{\jmath} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} f\left(\vec{\imath}\right) & = & \vec{\jmath} \\ f\left(\vec{\jmath}\right) & = & 4\,\vec{\imath} \end{array}\right.$$

$\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires :

$$\mathcal{F} = \{f_{a,\,b} = a.I + b.f \quad |(a\ ;\ b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}.$$

(Noter que $I = f_{1,\,0}$ et $f = f_{0,\,1}$.)

Partie A

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de dimension deux de $\mathcal{L}(\text{E})$.
2. Préciser la nature de $f \circ f$.
   Vérifier que $f \circ f$ est un élément de $\mathcal{F}$.
   Montrer que $(\mathcal{F}, +, \circ)$ est un anneau. Est-il commutatif? unitaire?
3. $(a\ ;\ b)$ désignant un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, montrer que l'équation dans $\mathcal{F}$: $f_{a,\,b} \circ f_{x,\,y} = f_{0,\,0}$ admet pour seule solution $f_{x,\,y} = f_{0,\,0}$ si, et seulement si, $f_{a,\,b}$ est une bijection.
   Montrer que l'ensemble des éléments non bijectifs de $\mathcal{F}$ est la réunion de deux droites vectorielles de $\mathcal{F}$, que l'on précisera.

Partie B

1. Déterminer suivant les valeurs de a et b, l'espace image et le noyau de $f_{a,\,b}$.
2. Déterminer tous les éléments $(a\ ;\ b)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour lesquels $f_{a,\,b}$ est :
   a. une projection vectorielle,
   b. une symétrie vectorielle.
   Pour chacune de ces applications, préciser les deux droites vectorielles qui la caractérisent.

Partie C

Si φ est un endomorphisme de E on note

$$\varphi^2 = \varphi \circ \varphi, \quad \varphi^{n+1} = \varphi^n \circ \varphi,$$

n désignant un entier naturel.

1. Montrer que $\mathscr{B} = \left(f_{2,\,1},\ f_{-2,\,1}\right)$ est une base de $\mathscr{F}$.
   Déterminer les endomorphismes

$$\left(f_{2,\,1}\right)^2, \quad \left(f_{-2,\,1}\right)^2, \quad f_{2,\,1} \circ f_{-2,\,1} \quad f_{-2,\,1} \circ f_{2,\,1}.$$

2. Si $\varphi = \alpha.f_{2,\,1} + \beta.f_{-2,\,1}$, préciser les coordonnées $\left(\alpha_n\ ;\ \beta_n\right)$ de φ^n dans la base $\mathscr{B}$.
3. Plus particulièrement on prend $\varphi = f_{3,\,1}$.
   Déterminer ses coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$ dans la base $\mathscr{B}$. En déduire les nombres a_n et b_n tels que $\left(f_{3,\,1}\right)^n = a_n.I + b_n.f$.
4. Montrer que a_n et b_n sont des entiers naturels.

Partie D

On considère les deux applications g_1 et g_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{array}{lcl} g_1(x) & = & \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{5x}, \\ g_2(x) & = & 2\left(-\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{5x}\right). \end{array}$$

P désigne l'espace vectoriel engendré par g_1 et g_2.

1. Montrer que $\left(g_1\ ;\ g_2\right)$ est une base de P.
2. Montrer-que si g est élément de P alors sa fonction dérivée est dans P.
   Vérifier que l'application $\Phi : g \longmapsto g'$ est un automorphisme de P.
3. Que représente l'automorphisme Φ^2 ?
   D'une façon plus générale, que représente Φ^n, pour $n \in \mathbb{N}*$?
   Calculer $\Phi^n\left(g_1\right)$ et le décomposer dans la base $\left(g_1\ ;\ g_2\right)$ de P. Comparer le résultat avec celui du paragraphe C et justifier.