∽ Baccalauréat C Rennes septembre 1973 ∾

EXERCICE 1

Soit f l'application de $[0~;~\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^x \sin x.$$

1. f' désignant la dérivée de f, montrer qu'il existe deux nombres réels a et b que l'on calculera, tels que

$$\forall x \in [0~;~\pi],\quad f(x) = a\mathrm{e}^x \cos(x+b).$$

2. Étudier les variations de f et construire sa représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
(On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes :

$$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \approx 4,7;\quad \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}} \approx 10;\quad \mathrm{e}^{\pi} \approx 23.$$

3. Au moyen de deux intégrations par parties successives, calculer

$$I(x) = \int_0^{\pi} \frac{1}{4}\mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t.$$

En déduire l'aire de la partie du plan

$$A = \left\{(x~;~y) : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}.$$

EXERCICE 2

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n impairs tels que la fraction $\dfrac{n^3-n}{n+2}$ soit réductible.

EXERCICE 3

Partie A

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, euclidien et de dimension 2. Soit $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ une base orthonormée de E.
Soit φ l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

où θ est un nombre réel donné tel que $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

1. **a.** Déterminer le noyau de φ.
   b. Montrer qu'il existe deux nombres réels λ_1 et λ_2, que l'on calculera, tels qu'il existe des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ non nuls de E vérifiant

$$\varphi\left(\overrightarrow{u_1}\right) = \lambda_1\overrightarrow{u_1}\quad\text{et}\quad\varphi\left(\overrightarrow{u_2}\right) = \lambda_2\overrightarrow{u_2}.$$

   Soit

$$(\Delta_1) = \left\{\overrightarrow{u} : \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\,\overrightarrow{u}\right\} \quad (\Delta_2) = \left\{\overrightarrow{u} : \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda_2\,\overrightarrow{u}\right\}$$

Montrer que (Δ_1) et (Δ_2) sont deux droites vectorielles.

Donner une base $\overrightarrow{e_1}$ de (Δ_1) et $\overrightarrow{e_2}$ de (Δ_2).

On examinera en particulier les cas $\theta = 0,\ \theta = \pi,\ \theta = \dfrac{\pi}{4}$.

c. Montrer que (Δ_1) et (Δ_2) sont orthogonales.

d. Quelle est la nature de φ ?

e. Écrire la matrice φ par rapport à la base $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ de E.

2. Montrer, en utilisant la multiplication des matrices 2×2, que φ est le produit d'une rotation vectorielle d'angle $-\theta$ par une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle (D) que l'on déterminera.

Partie B

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine dont E est l'espace vectoriel associé. $\mathscr{E}$ est rapporté au repère $\left(\text{O} ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, où $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ sont les vecteurs de la base $\mathscr{B}$.

Soit F une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que F(O) = O et que $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ soit la matrice de l'applicatIon linéaire associée f.

1. Montrer que F est une bijection affine.

$(x ;\ y)$ étant les coordonnées d'un point M de $\mathscr{E}$ et $(x' ;\ y')$ celles de son transformé $\text{M}' = \text{F(M)}$, montrer que $x' = x + y$ et $y' = x - y$.

2. Montrer que la matrice de f est le produit de la matrice d'une application φ_0 correspondant à une valeur particulière θ_0 que l'on déterminera, par un scalaire positif.

En déduire que F est la composée de deux transformations ponctuelles simples permutables.

3. En identifiant le plan affine $\mathscr{E}$ au plan de représentation du corps des complexes, montrer que si l'on note z l'affixe de M, z' celle de $\text{M}' = \text{F(M)}$ et $\overline{z}$ le conjugué de z, on a $z' = a\overline{z},\ a$ étant un nombre complexe dont on donnera la partie réelle et la partie imaginaire, ainsi que le module et l'argument.

4. a. Une courbe (H) de $\mathscr{E}$ a pour équation $x^2 - y^2 = 1$ dans le repère $\left(\text{O} ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Quelle est l'équation de la transformée de (H) par F dans le même repère ?

b. Une courbe $\left(\text{L}'\right)$ de $\mathscr{E}$ a pour équation

$$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4 = 0$$

dans le repère $\left(\text{O} ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Quelle est, dans le même repère, l'équation de la courbe (L) dont la transformée par F est $\left(\text{L}'\right)$?

Reconnaître la nature de (L) et en déduire celle de $\left(\text{L}'\right)$.