Durée : 4 heures

Baccalauréat C Rennes septembre 1969

EXERCICE 1

Étant donné, dans un plan, deux points, A et B, d'une droite Δ, on considère le cercle Γ de diamètre AB.
Soit P un point de $[\Delta - \Delta \cap \Gamma]$ et Q un point de $[\Delta - \Delta \cap \Gamma]$.
Montrer que les cercles définis, l'un par les trois points A, P et Q, l'autre par B, P et Q, sont orthogonaux.

EXERCICE 2

Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation en z suivante :

$$(4-3\text{i})z^2 - (10+5\text{i})z + 3 + 5\text{i} = 0.$$

PROBLÈME

Partie A

1. n étant un entier *relatif*, on considère l'application f_n de $[n\,;\,n+1]$ dans $\mathbb{R}$ qui, à $x \in [n\,;\,n+1]$, fait correspondre le nombre réel

$$f_n(x) = n + 1 - \sqrt{(n+1) - x}.$$

   On désigne par G_n le graphe de f_n, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ et par A_n le point $(n\,;\,n)$.
   Pour un n donné, étudier les variations de f_n.
   Montrer que f_n est une bijection de $[n\,;\,n+1]$ sur $[n\,;\,n+1]$.
   A_n et A_{n+1} sont les extrémités de G_n. Peut-on définir une position limite pour chacune des demi-droites A_nM ou A_{n+1}M, lorsque M tend respectivement vers A_n ou A_{n+1} en restant sur G_n ?
   Dessiner G_0 graphe de f_0 : $f_0(x) = 1 - \sqrt{1-x}$.
   Pour un n donné, montrer qu'il existe une transformation géométrique simple, T_n du plan dans lui-même, telle que G_n soit le transformé de G_0 par T_n.
   Dessiner sur une même figure G_{-2}, G_{-1}, G_0, G_1, G_2.
2. À tout nombre réel x correspond un entier relatif $n(x)$ tel que

$$n(x) \leqslant x < n(x) + 1.$$

   On définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$f(x) = f_{n(x)}(x).$$

   Par exemple, si $x = -\sqrt{3}$, $n(x) = -2$ et $f\left(-\sqrt{3}\right) = f_{-2}\left(-\sqrt{3}\right) = -1 - \sqrt{\sqrt{3} - 1}$.
   Montrer que f est une fonction monotone et continue sur $\mathbb{R}$.
   Est-elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}$?
   Le graphe, G, de f peut-il s'obtenir simplement à partir des graphes G_n des fonctions f_n ?

Partie B

1. f étant la fonction qui vient d'être définie, on considère l'application Φ du plan dans lui-même qui, au point de coordonnées $(x\,;\,y)$, fait correspondre le point de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ telles que

$$x' = f(x), \quad y' = \sqrt{|y|}.$$

On écrit $\Phi[(x\,;\,y) = \left[f(x),\,\sqrt{|y|}\right]$.
Montrer que Φ n'est ni injective, ni surjective.
n étant un entier relatif, $\mathcal{B}_n$ désigne l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que

$$x \in [n\,;\,n+1],\ y \geqslant 0;$$

montrer que $\Phi\left(\mathcal{B}_n\right) = \mathcal{B}_n$.

2. n étant un entier relatif et A_n le point de coordonnées $(n\,;\,n)$, étudier le transformé par Φ du segment de droite A_nA_{n+1}.
(Distinguer les cas $n \geqslant 0$ et $n < 0$.)
$\mathcal{A}_n = \Phi\left(A_nA_{n+1}\right)$ est un arc d'une courbe, que l'on caractérisera géométriquement suivant la valeur de n.
Dessiner sur une même figure $\mathcal{A}_{-2}$, $\mathcal{A}_{-1}$, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$.