

♻ Baccalauréat Rennes juin 1966 ♻
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

$\text{Log } x$ désigne le logarithme népérien d'un nombre positif x .

1. Calculer la dérivée de la fonction f telle que

$$f(x) = x \text{Log } x.$$

2. En écrivant $\text{Log } x = (\text{Log } x + 1) - 1$, calculer une primitive de $\text{Log } x$.
3. Calculer l'aire du triangle mixtiligne délimité par le graphe de la fonction g telle que $g(x) = \text{Log } x$, l'axe Ox et la droite d'équation $x = e$, le plan étant rapporté à un repère orthonormé xOy .

EXERCICE 2

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ on considère les points A et A' de l'axe $x'Ox$ d'abscisses respectives $-a$ et a ($a > 0$).

On appelle (C) le cercle de diamètre AA' , (T) et (T') les tangentes en A et en A' à ce cercle. On désigne par (Δ) une droite qui coupe (T) et (T') respectivement en B et B' , d'ordonnées λ et λ' .

1. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (Δ) soit tangente au cercle (C) se traduit par la relation $\lambda\lambda' = a^2$.
2. Soit (D) la droite d'équation $x = 3a$. Par le point M de (D) d'ordonnée m on mène les tangentes au cercle (C) , qui coupent la droite (T) en P et Q d'ordonnées λ et μ .
Montrer que λ et μ sont les racines de l'équation en u

$$u^2 + mu - 2a^2 = 0.$$

3. Montrer que le centre de gravité du triangle MPQ reste fixe lorsque M décrit (D) et qu'il est aussi l'enveloppe des polaires des points de (D) par rapport au cercle (C) .
4. Montrer que les cercles (Ω) de diamètre PQ appartiennent à un faisceau $(\mathcal{F})$ à points de base. Ceux-ci seront appelés I et J .
Montrer que l'axe radical du cercle variable (Ω) et du cercle (C) passe par un point fixe.
5. Montrer que les polaires de chaque point M de (D) par rapport à tous les cercles du faisceau $(\mathcal{F})$ sont concourantes en un point N . [On associe ainsi à chaque point M de (D) un point N du plan.]
Prouver que tout cercle de diamètre MN appartient au faisceau dont les points limites sont I et J .

Déterminer l'équation du cercle de diamètre MN par rapport au repère $X'AX, Y'AY$ déduit du repère $x'Ox, y'Oy$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

Quel est le lieu du point N lorsque le point M décrit la droite (D)?

6. On suppose maintenant que le point M d'ordonnée m décrit la droite (D) suivant la loi horaire

$$m = 2at.$$

Étudier alors le mouvement du point N sur son lieu, en caractérisant le vecteur accélération de ce mouvement.