Baccalauréat Rennes juin 1967
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

1. Soit f la fonction qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le nombre réel $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Étudier les variations de cette fonction et tracer son graphique, (C), dans un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.

2. Soit g la fonction qui, à tout nombre réel x différent de 1, fait correspondre le nombre réel $g(x)$:

$$g(x) = \frac{|(x-1)(2x+1)|}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}$$

et au nombre 1 fait correspondre le nombre 1.

$|(x-1)(2x+1)|$ signifie : valeur absolue du produit $(x-1)(2x+1)$.

La fonction g est-elle continue pour $x = 1$; pour $x = -\dfrac{1}{2}$?

La fonction g est-elle dérivable pour $x = -\dfrac{1}{2}$?

Comment peut-on déduire le graphique, (C'), de la fonction g du graphique, (C), de la fonction f ?

EXERCICE 2

Déterminer deux nombres entiers naturels dont la différence est 22 932 et dont le PPCM (plus petit commun multiple) est 98 280.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Soit $\overrightarrow{x'\text{O}x}$ et $\overrightarrow{y'\text{O}y}$ les axes. A et B sont deux points variables de $x'\text{O}x$, d'abscisses respectives a et b.
C est un point fixe de $y'\text{O}y$, d'ordonnée c positive ; C$'$ est le symétrique de C par rapport à O.
Soit $(\mathscr{A})$ le cercle de centre A et de rayon AC, $(\mathscr{B})$ le cercle de centre B et de rayon BC. La tangente CT en C au cercle $(\mathscr{A})$ et la tangente C$'$T$'$ en C$'$ au cercle $(\mathscr{B})$ ont, en général, un point commun, M.
Le problème a pour objet l'étude de quelques ensembles de points M, dans des cas qui peuvent être traités *indépendamment les uns des autres.*

1. Déterminer les coordonnées de M. En déduire l'ensemble (E_1) des points M lorsque les points A et B varient sur $x'\text{O}x$ en restant symétriques par rapport à un point fixe, K, d'abscisse k $(k \neq 0)$.

   Indiquer une construction simple de (E_1) lorsque le point K est donné.

2. Les points A et B varient de telle sorte que $\overline{\text{AB}} = \ell$, ℓ étant un nombre positif donné.

   Déterminer analytiquement et construire l'ensemble (E_2) des points M correspondants.

   Que devient (E_2) si l'on suppose $\overline{\text{AB}} = -\ell$?

3. Les cercles $(\mathscr{A})$ et $(\mathscr{B})$ varient maintenant en se coupant sous un angle constant, c'est-à-dire que, si CT_1 est la tangente en C à $(\mathscr{B})$,

$$(\text{CT},\ \text{CT}_1) = V \quad (\text{modulo}\,\pi),$$

V étant un nombre donné $\left(-\dfrac{\pi}{2} < V \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$. Calculer tg V en fonction de a, b et c.

a. Déterminer analytiquement et construire l'ensemble (E_3) des points M quand $V = \dfrac{\pi}{2}$.

b. Déterminer l'équation cartésienne, par rapport aux axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$, de l'ensemble (E_4) des points M pour V tel que $-\dfrac{\pi}{2} < V < \dfrac{\pi}{2}$.

On considère, dans le plan, un nouveau repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, lié au repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ par les relations

$$\left\{\begin{array}{lcl}\overrightarrow{u} & = & \overrightarrow{\imath}\sin\dfrac{V}{2} + \overrightarrow{\jmath}\cos\dfrac{V}{2}\\ \overrightarrow{v} & = & -\overrightarrow{\imath}\cos\dfrac{V}{2} + \overrightarrow{\jmath}\sin\dfrac{V}{2}\text{ů}\end{array}\right.$$

Déduire de ces relations et des égalités

$$\overrightarrow{\text{O}M} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} = X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v}.$$

les coordonnées, x et y, d'un point M dans le repère initial $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, en fonction des coordonnées, X et Y, de ce point dans le nouveau repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

Écrire l'équation de (E_4) dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ et préciser la nature de cet ensemble. Construire $(\text{E}_4)\cdot$

4. Cette question a pour but de retrouver géométriquement (E_1) et (E_2). Elle est indépendante de la question 3.

Soit B′ le point symétrique du point B par rapport à O. Démontrer que les triangles MCC′ et CAB′ sont semblables.

Lorsque les points A et B varient sur $x'\text{O}x$ en restant symétriques par rapport à un point fixe K, d'abscisse k, calculer $\overline{\text{AB}'}$.

En déduire géométriquement l'ensemble (E_1) des points M correspondants.

Lorsque les points A et B varient de telle sorte que $\overline{\text{AB}} = \ell$, quelle relation existe-t-il entre les points A et B′ ?

En déduire l'ensemble (E_2) des points M correspondants.