

↻ Baccalauréat Rennes septembre 1966 ↻
série mathématiques élémentaires

I.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, déterminer l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points $(x; y)$ tels que

$$0 \leq xy \leq x^2 - 1.$$

a étant un nombre réel supérieur ou égal à 1, calculer l'aire $S(a)$ de la partie de $(\mathcal{D})$ telle que $1 \leq x \leq a$.

Si a et b sont deux nombres réels supérieurs ou égaux à 1 tels que les trois nombres a , b et $a + 1$ forment, dans cet ordre, une progression géométrique, calculer

$$S(a) + S(a + 1) - 2S(b).$$

II.

On considère la relation

$$(1) \quad 6z^2 - 3z \sin \theta + \cos \theta = 0,$$

qui lie les deux variables θ et z .

1. z étant un nombre réel donné, (1) est alors une équation en θ ; on cherche les valeurs réelles de θ , solutions de cette équation, en fonction de z .

- a. Calculer effectivement ces valeurs lorsque $z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- b. Discuter suivant les valeurs de z l'existence des solutions de l'équation et le nombre des extrémités des arcs du cercle trigonométrique qui ont pour mesures ces solutions.

2. θ étant un nombre réel donné, (1) est alors une équation en z ; on cherche les valeurs réelles ou complexes de z , solutions de cette équation.

Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles (1) possède

- a. une racine double;
- b. deux racines réelles et distinctes;
- c. deux racines complexes.

Dans ce dernier cas, calculer le module des racines en fonction de θ et montrer qu'il est compris entre deux nombres indépendants de θ .

3. Dans un plan on donne un système d'axes orthonormé $x'O$, $y'Oy$.

- a.** Déterminer le transformé (E) du cercle (C) de centre O et de rayon dans l'affinité orthogonale d'axe $x'x$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

Le point M appartenant à (C), on pose $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Calculer en fonction de θ les coordonnées du point M' transformé de M dans cette affinité.

- b.** On donne la parabole (P) qui a pour tangente au sommet $y'y$ et pour foyer le point F de Ox tel que $\overline{OF} = \frac{1}{6}$.

H étant un point de $y'y$, on pose $\overline{OH} = z$.

Déterminer en fonction de z l'équation de la tangente (T) à (P), autre que $y'y$ si $z \neq 0$, qui passe par H.

- c.** Montrer que l'équation (1) est une condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier θ et z pour que le point M' appartienne à (T).