∽ Baccalauréat Rennes septembre 1967 ∾
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$, on considère le point M d'affixe $z = \sqrt{2}(1+\mathrm{i})$, le point P d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{z}$ et le point P′, d'affixe z_2, symétrique de P par rapport à l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$.

1. Donner l'expression algébrique et l'expression trigonométrique des nombres z, z_1 et z_2.
2. On considère le point Q d'affixe $z' = \dfrac{4}{3}(z_1 + z_2)$.
   Démontrer que les trois points M, P et Q sont alignés.
   Dans quel rapport le point Q divise-t-il le segment orienté MP ?

II.

On considère la fonction f qui, à tout nombre réel x de l'intervalle I = $[+2\ ;\ +6]$ $(2 \leqslant x \leqslant 6)$, associe le nombre

$$y = \frac{-2x^2+3x+2}{x-1}.$$

Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque, f^{-1}, définie sur un intervalle J, que l'on précisera.
Quel est le sens de variation de la fonction f^{-1} sur l'intervalle J ?
Déterminer la relation qui permet de calculer l'image d'un nombre quelconque de l'intervalle J par la fonction f^{-1}.

III.

On donne, dans le. plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$, les points A$(-1\ ;\ 0)$, A′$(+4\ ;\ 0)$ et S$(0\ ;\ h)$, h désignant un nombre réel donné strictement positif $(h > 0)$.
Soit M$(m\ ;\ 0)$ un point quelconque de $x'\mathrm{O}x$. On désigne par (C) le cercle, de centre C, de rayon R, circonscrit. au triangle ASM et par (C′) le cercle, de centre C′, de rayon R′, circonscrit au triangle A′SM.

1. **a.** Montrer que les coordonnées de C sont

$$x = \frac{m-1}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{h^2-m}{2h}$$

   et celles de C′

$$x = \frac{m+4}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{h^2+4m}{2h}$$

   Calculer R^2, R'^2 et CC'^2 en fonction de m et h.

   b. Le nombre h étant fixe, pour quelle valeur de m la distance CC′ est-elle minimale ?
   Quelle est la valeur de ce minimum ? Quelle est alors la direction de CC′ ?

c. h étant fixe, quel est, quand M décrit $x'x$, l'ensemble des points C ? Quel est l'ensemble des points C$'$?

2. Soit K la projection orthogonale de S sur CC$'$.

Démontrer que les triangles SCC$'$ et SAA$'$ sont directement semblables, ainsi que les triangles SCK et SAO.

Quel est l'ensemble des points K lorsque M décrit $x'x$.

Retrouver les résultats du **1. b.** à partir de l'étude de cet ensemble des points K.

3. *On suppose maintenant, pour toute la suite du problème, que* $h = 3$.

a. Dans ce cas particulier, calculer la valeur constante du rapport $\dfrac{\text{SC}'}{\text{SC}}$ et les nombres $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, α désignant la détermination principale de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{\text{SC}},\ \overrightarrow{\text{SC}'}\right)$ $(-\pi < \alpha \leqslant \pi)$.

b. Soit P$(a\ ;\ b)$ un point du plan. Écrire l'équation de la droite CC$'$ et déterminer le nombre de droites CC$'$ passant par P, suivant la position de ce point dans le plan.

Si P est extérieur à une parabole, $(\mathscr{P})$, il passe, par ce point, deux droites CC$'$.

Préciser le foyer et la directrice de $(\mathscr{P})$.

Montrer que la droite CC$'$ est tangente à $(\mathscr{P})$ quel que soit m ; calculer les coordonnées du point de contact.