Baccalauréat Rennes septembre 1966
série mathématiques élémentaires

I.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, déterminer l'ensemble $(\mathscr{D})$ des points $(x\,;\,y)$ tels que

$$0 \leqslant xy \leqslant x^2 - 1.$$

a étant un nombre réel supérieur ou égal à 1, calculer l'aire $S(a)$ de la partie de $(\mathscr{D})$ telle que $1 \leqslant x \leqslant a$.
Si a et b sont deux nombres réels supérieurs ou égaux à 1 tels que les trois nombres a, b et $a+1$ forment, dans cet ordre, une progression géométrique, calculer

$$S(a) + S(a+1) - 2S(b).$$

II.

On considère la relation

$$(1) \qquad 6z^2 - 3z\sin\theta + \cos\theta = 0,$$

qui lie les deux variables θ et z.

1. z étant un nombre réel donné, (1) est alors une équation en θ ; on cherche les valeurs réelles de θ, solutions de cette équation, en fonction de z.
   - **a.** Calculer effectivement ces valeurs lorsque $z = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
   - **b.** Discuter suivant les valeurs de z l'existence des solutions de l'équation et le nombre des extrémités des arcs du cercle trigonométrique qui ont pour mesures ces solutions.
2. θ étant un nombre réel donné, (1) est alors une équation en z ; on cherche les valeurs réelles ou complexes de z, solutions de cette équation.
   Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles (1) possède
   - **a.** une racine double ;
   - **b.** deux racines réelles et distinctes ;
   - **c.** deux racines complexes.

   Dans ce dernier cas, calculer le module des racines en fonction de θ et montrer qu'il est compris entre deux nombres indépendants de θ.
3. Dans un plan on donne un système d'axes orthonormé $x'\text{O}$, $y'\text{O}y$.
   - **a.** Déterminer le transformé (E) du cercle (C) de centre O et de rayon dans l'affinité orthogonale d'axe $x'x$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$.
     Le point M appartenant à (C), on pose $\left(\overrightarrow{\text{O}x}\,,\ \overrightarrow{\text{OM}}\right) = \theta,\ 0 \leqslant a \leqslant 2\pi$.
     Calculer en fonction de θ les coordonnées du point M$'$ transformé de M dans cette affinité.
   - **b.** On donne la parabole (P) qui a pour tangente au sommet $y'y$ et pour foyer le point F de Ox tel que $\overline{\text{OF}} = \dfrac{1}{6}$.
     H étant un point de $y'y$, on pose $\overline{\text{OH}} = z$.
     Déterminer en fonction de z l'équation de la tangente (T) à (P), autre que $y'y$ si $z \neq 0$, qui passe par H.
   - **c.** Montrer que l'équation (1) est une condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier θ et z pour que le point M$'$ appartienne à (T).