∽ Baccalauréat C Rome septembre 1959 ∾

I. - 1$^{\text{er}}$ sujet

Équation de l'hyperbole rapportée à ses axes de symétrie.
Application : Quelle est la longueur de l'axe transverse et quelle est la distance focale de l'hyperbole ayant pour équation, en axes rectangulaires,

$$3x^2 - y^2 - 3 = 0\,?$$

I. - 2$^{\text{e}}$ sujet

Sections planes d'un cylindre de révolution.

I. - 3$^{\text{e}}$ sujet

Lieu géométrique des points M d'un plan orienté tels que, A et B étant deux points fixes de ce plan, l'un des angles des droites MA et MB ait une valeur donnée.

II. - Problème

Dans tout le problème, $a,\ b,\ c,\ d$ désignent quatre nombres vérifiant la relation $bc - ad = 1$; on supposera toujours $a \geqslant 0,\ b > 0,\ c \geqslant 0,\ d > 0$ et x désignera un nombre quelconque compris entre $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$.

$$\left(\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d}\right)$$

1. Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, on trace le cercle (C) de rayon $\dfrac{1}{2b^2}$, centré au point I d'abscisse $\dfrac{a}{b}$ et d'ordonnée $\dfrac{1}{2b^2}$ et le cercle (C$'$) de rayon $\dfrac{1}{2d^2}$ centré au point I$'$ d'abscisse $\dfrac{c}{d}$ et d'ordonnée $\dfrac{1}{2d^2}$.
   a. Calculer la distance II$'$ et montrer que (C) et (C$'$) sont tangents extérieurement.
   En déduire que la parallèle à $y'\text{O}y$ d'abscisse x rencontre l'un au moins des cercles (C) et (C$'$).
   b. Montrer que l'une au moins des inégalités

   $$x - \frac{a}{b} \leqslant \frac{1}{2b^2}, \quad \frac{c}{d} - x \leqslant \frac{1}{2d^2} \quad \text{est vérifiée.}$$

   (On pourra, soit utiliser le résultat précédent, soit établir directement l'inégalité : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{2b^2} \geqslant \dfrac{c}{d} - \dfrac{1}{2d^2}$.)
2. **a.** Étudier les variations des fonctions

   $$f(t) = \frac{a + ct}{b + dt} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{at + c}{bt + d}$$

   quand t croit de 0 à $+\infty$.

b. On suppose désormais que les nombres a, b, c, d sont entiers (ce qui entraîne $b \geqslant 1$ et $d \geqslant 1$) et que le nombre x n'est égal à aucune fraction.

Montrer qu'il existe un nombre entier $m \geqslant 0$ satisfaisant à

$$\frac{a+cm}{b+dm} < x < \frac{a+c(m+1)}{b+d(m+1)}$$

sans égalité possible.

Posant $\begin{array}{ll} a' = a+cm, & c' = a+c(m+1) \\ b' = b+dm, & d' = b+d(m+1) \end{array}$

montrer de même qu'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que

$$\frac{c'+(p+1)a'}{d'+(p+1)b'} < x < \frac{c'+pa'}{d'+pb'}.$$

3. On pose :

$a_1 = a+cm, \quad c_1 = c'+pa'$

$b_1 = b+dm, \quad d_1 = b+d(m+1).$

Montrer qu'on a $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a_1}{b_1} < x < \dfrac{c_1}{d_1} < \dfrac{c}{d}$.

Calculer la quantité $b_1c_1 - a_1d_1$ et montrer que les fractions

$$\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{c_1}{d_1}, \frac{c}{d}$$

sont irréductibles.

4. Déduire de ce qui précède que, si le nombre x n'est égal à aucune fraction, il existe une infinité de fractions irréductibles $\dfrac{p}{q}$ telles que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

(On pourra poser $b = d = 1$, $a = n$, $c = n+1$, en désignant par $n$le plus grand entier inférieur à x, et montrer qu'on peut répéter autant de fois que l'on veut la construction précédente.)

Montrer que, si y est un nombre fractionnaire, il n'existe qu'un nombre fini de fractions $\dfrac{p}{q}$ satisfaisant à

$$\left|y - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2} \qquad \text{et} \qquad y \neq \frac{p}{q}.$$

N. B. - Les questions **1.** et **2.** sont indépendantes.