∽ Série mathématiques et mathématiques et technique ∾
Baccalauréat Rome [1] juin 1958

I

1$^{\text{er}}$ sujet
Établir les formules qui permettent de transformer en produits les expressions $\sin p \pm \sin q$, $\cos p \pm \cos q$, $\text{tg } p \pm \text{tg } q$.

Application : Résoudre l'équation,

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 3x + \sin 5x.$$

2$^{\text{e}}$ sujet
Limite du quotient $\dfrac{\sin x}{x}$, lorsque x, évalué en radians, tend vers 0.
Dérivée de la fonction $y = \sin(ax + b)$, x évalué en radians, a et b constantes quelconques.

3$^{\text{e}}$ sujet
Établir les deux systèmes fondamentaux de relations entre côtés et angles d'un triangle.
Dire à quelles conditions trois longueurs a, b, c et trois angles A, B, C, satisfaisant à l'un ou l'autre de ces systèmes, sont les côtés et les angles d'un triangle.

II

On désigne par O le centre du cercle circonscrit, par H l'orthocentre, par A′ le milieu du côté BC d'un triangle ABC.

1. Quels sont le centre et le rapport de l'homothétie qui transforme le vecteur $\overrightarrow{\text{AH}}$ en le vecteur $\overrightarrow{\text{A}'\text{O}}$?
2. Construire le triangle ABC, connaissant les points O, H et A. Discuter.
   Montrer que, pour que le problème soit possible, O et H étant fixés, A doit être extérieur à un cercle (I) de centre I et, par suite, A′ extérieur à un cercle (I′) de centre I′.
3. Le point A décrivant une tangente commune extérieure aux cercles (I) et (I′), quels sont le lieu du point A′ et l'enveloppe du côté BC ?
4. On pose $\text{OH} = \dfrac{3d}{2}$; la tangente commune intérieure à (I) et (I′) coupe le lieu de A en K et le lieu de A′ en K′.
   Le point O se projette sur le lieu de A en P, sur le lieu de A′ en Q ; évaluer en fonction de d les longueurs OP, OQ, KP, K′Q.
5. Le lieu de A étant orienté de K vers P, on fixe la position du point A sur son lieu par son abscisse $\overline{\text{KA}} = x$.
   Évaluer, en fonction de d et de x, le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC et le côté BC = a de ce triangle. En déduire les variations de

   $$y = \frac{1}{\sin^2 A},$$

   quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.
   Tracer la courbe représentative.

1. Israël