Baccalauréat Série mathématiques Rome septembre 1957 [1]

I

1$^{\text{er}}$ sujet.

Démontrer que le rapport $\dfrac{\sin x}{x}$ tend vers l'unité lorsque l'arc x, mesuré en radians, tend vers zéro.
En déduire le calcul de la dérivée de $\sin x$.

2$^{\text{e}}$ sujet.
Transformation en somme du produit d'un sinus par un cosinus.
Exemple : Transformer en somme $\sin a \cdot \cos 3a$.
3$^{\text{e}}$ sujet.
Transformation de $a\cos x + b\sin x$ en une expression de la forme $R\cos(x-\varphi)$, R et φ étant indépendants de x.
Application : Résoudre l'équation

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}.$$

II

Soient deux points fixes distincts A et B. O désignant le milieu du segment AB, on pose AO = OB = a.
On désigne par $x'\text{A}x$ et $y'\text{B}y$ deux axes parallèles fixes, orientés dans le même sens et respectivement perpendiculaires en A et B à la droite AB.
Deux points M et N varient respectivement sur $x'\text{A}x$ et $y'\text{B}y$, de manière que le produit $\overline{\text{AM}} \cdot \overline{\text{BN}}$ soit égal à λa^2. (λ est un nombre algébrique constant donné différent de zéro).
On désigne par ω le milieu de MN et par (ω) le cercle de diamètre MN.

1. Quelles sont les puissances des points A, B et O par rapport au cercle (ω) ?
   Montrer que les cercles (ω) appartiennent à un faisceau fixe $(\mathcal{F})$. Préciser, suivant les valeurs de λ, les positions des points de base ou des points limites de ce faisceau.
2. Dans l'hypothèse où λ est égal à l'unité, montrer que la droite MN reste tangente à un cercle fixe.
3. On se place dans l'hypothèse où le faisceau $(\mathcal{F})$ a des points limites distincts, C et D. Lorsqu'elle n'est pas parallèle à AB, la droite MN coupe la droite AB en I.
   On pose α = (IO, IC) et β = (IO, Iω) (α et β sont des angles de droites).
   Montrer que $\overline{\text{IC}}^2 = \text{IM} \cdot \text{IN}$. Vérifier que le produit $\text{IM} \cdot \text{IN} \cdot \sin^2\beta$ demeure constant lorsque M et N varient.
   Exprimer le rapport $\dfrac{|\sin\beta|}{|\sin\alpha|}$ en fonction de λ.
   Soit φ le symétrique de C par rapport à la droite MN.
   Montrer que le rapport $\dfrac{\text{CD}}{\text{D}\varphi}$ est indépendant des positions des points M et N.
   En déduire que la droite MN reste tangente à une conique fixe, Γ, dont on précisera la nature.
4. On se place dans l'hypothèse où le faisceau $(\mathcal{F})$ admet des points de base, E et F, distincts. Soit H la projection orthogonale de F sur la droite MN.
   Montrer que les droites HA et HB sont orthogonales. En déduire que la droite MN reste tangente à une conique fixe, dont on indiquera la nature.

1. Israël juin 1958