

∞ Baccalauréat Rome septembre 1957¹ ∞

Série mathématiques

I

1^{er} sujet.

Démontrer que le rapport $\frac{\sin x}{x}$ tend vers l'unité lorsque l'arc x , mesuré en radians, tend vers zéro.

En déduire le calcul de la dérivée de $\sin x$.

2^e sujet.

Transformation en somme du produit d'un sinus par un cosinus.

Exemple : Transformer en somme $\sin a \cdot \cos 3a$.

3^e sujet.

Transformation de $a \cos x + b \sin x$ en une expression de la forme $R \cos(x - \varphi)$, R et φ étant indépendants de x .

Application : Résoudre l'équation

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}.$$

II

Soient deux points fixes distincts A et B. O désignant le milieu du segment AB, on pose $AO = OB = a$.

On désigne par $x'Ax$ et $y'By$ deux axes parallèles fixes, orientés dans le même sens et respectivement perpendiculaires en A et B à la droite AB.

Deux points M et N varient respectivement sur $x'Ax$ et $y'By$, de manière que le produit $\overline{AM} \cdot \overline{BN}$ soit égal à λa^2 . (λ est un nombre algébrique constant donné différent de zéro).

On désigne par ω le milieu de MN et par (ω) le cercle de diamètre MN.

1. Quelles sont les puissances des points A, B et O par rapport au cercle (ω) ?

Montrer que les cercles (ω) appartiennent à un faisceau fixe $(\mathcal{F})$. Préciser, suivant les valeurs de λ , les positions des points de base ou des points limites de ce faisceau.

2. Dans l'hypothèse où λ est égal à l'unité, montrer que la droite MN reste tangente à un cercle fixe.

3. On se place dans l'hypothèse où le faisceau $(\mathcal{F})$ a des points limites distincts, C et D. Lorsqu'elle n'est pas parallèle à AB, la droite MN coupe la droite AB en I.

On pose $\alpha = (\text{IO}, \text{IC})$ et $\beta = (\text{IO}, \text{ID})$ (α et β sont des angles de droites).

Montrer que $\overline{IC}^2 = \text{IM} \cdot \text{IN}$. Vérifier que le produit $\text{IM} \cdot \text{IN} \cdot \sin^2 \beta$ demeure constant lorsque M et N varient.

Exprimer le rapport $\frac{|\sin \beta|}{|\sin \alpha|}$ en fonction de λ .

1. Israël juin 1958

Soit φ le symétrique de C par rapport à la droite MN.

Montrer que le rapport $\frac{CD}{D\varphi}$ est indépendant des positions des points M et N.

En déduire que la droite MN reste tangente à une conique fixe, Γ , dont on précisera la nature.

4. On se place dans l'hypothèse où le faisceau ($\mathcal{F}$) admet des points de base, E et F, distincts. Soit H la projection orthogonale de F sur la droite MN.

Montrer que les droites HA et HB sont orthogonales. En déduire que la droite MN reste tangente à une conique fixe, dont on indiquera la nature.