Durée : 4 heures

Baccalauréat C Rouen juin 1970

EXERCICE 1

Par rapport à un repère orthonormé de vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on considère le vecteur

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{u} - 2\vec{v}.$$

Soit C le point de coordonnées (+5 ; +1).
Quelles sont les coordonnées du point D tel que le vecteur $\overrightarrow{CD}$ soit le transformé de $\overrightarrow{AB}$ par une rotation d'angle $+\dfrac{\pi}{3}$.?

EXERCICE 2

Dans cet exercice, n et p sont des entiers naturels non nuls et x représente un entier relatif.

1. Démontrer que, si $x^2 - x$ est un multiple de p, il en est de même pour $x^n - x$ et ce, quel que soit n.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de x telles que, pour toute valeur de n, $x^n - x$ soit un multiple de 6.

EXERCICE 3

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'\text{O}x, y'\text{O}y$, on donne les points $\text{A}(x = 0, y = a)$ et $\text{B}(x = 0, y = -a)$, où a est une longueur donnée non nulle. (On pourra réaliser la figure avec $a = 4$ cm.)
On désigne par (Γ) tout cercle du faisceau (F) à points de base A et B.

1. Le cercle (Γ) du faisceau (F), de centre

$$\omega(x = \lambda,\ y = 0),$$

coupe l'axe $x'\text{O}x$ en deux points, P$'$ et P$''$, variables avec le paramètre λ.
Écrire l'équation dont les racines, x' et x'', sont les abscisses des points P$'$ et P$''$, ainsi que la relation indépendante de λ qui lie ces racines.
2. On considère le cercle (Γ) du faisceau (F) passant par un point donné, M, du plan, non situé sur l'axe $y'\text{O}y$. Soit K le pôle de la droite AB par rapport au cercle (Γ) ; la droite KM recoupe le cercle (Γ) en un point M$'$, ainsi associé à M.
Déterminer la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OM}}, \overrightarrow{\text{OM'}}\right)$. On pose

$$\text{OM} = r, \quad \text{OM}' = r',$$

$$(\text{O}x,\ \text{OM}) = \theta \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad (\text{O}x,\ \text{OM}') = \theta' \pmod{2\pi}.$$

Démontrer, pour deux points M et M$'$ associés, les relations

$$\theta + \theta' = \pi \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad r \times r' = a^2$$

3. Quel est l'ensemble des points M$'$ dans chacun des deux cas suivants :

a. M décrit le cercle de centre O et de rayon $2a$;

b. M décrit la droite (D) passant par O telle que

$$(x'x, D) = +\frac{\pi}{6} \pmod{\pi} ?$$

Construire ces deux ensembles sur la même figure.

4. Calculer les coordonnées x et y de M, puis les coordonnées x' et y' de M$'$, en fonction de r et θ.

En déduire les coordonnées X et Y du milieu, I, de MM$'$. Former l'équation cartésienne de l'ensemble des points I dans chacun des cas a. et b. du 3.

Construire ces deux ensembles sur la même figure. Quelles sont les particularités géométriques de chacun d'eux ?

Calculer les coordonnées de leurs points communs.

5. Le paramètre u étant un nombre complexe, soit z et z' les racines de l'équation

$$Z^2 - 2uZ - a^2 = 0.$$

Écrire la relation simple indépendante de u que vérifient z et z'.

Indiquer comment sont associées géométriquement les images respectives, M et M$'$, de z et z' dans le plan complexe.

Quelle est alors l'image du nombre u ? On étudiera en particulier le cas où u est réel.

N. B. - La question 5. peut être traitée avant les questions 3. et 4.