Baccalauréat C Rouen juin 1973

EXERCICE 1

Un paquet de 10 cartes à jouer comprend 5 as, 3 rois et 2 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi rapporte 2 points et celui d'une dame coûte 1 point. Du paquet on extrait simultanément 2 cartes et on désigne par X le total des points marqués.
On suppose que les tirages sont équiprobables.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation ?

$$x^2 - \dot{3}x + \dot{2} = 0$$

(La classe de congruence de n, modulo 5, étant notée $\dot{n}$)

2. Déterminer les entiers relatifs n tels que le reste de la division euclidienne de $n^2 - 3n$ par 5 soit égal à 3.

PROBLÈME

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. a. On se propose d'étudier les variations de la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par

$$y = f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 11}{4(x-1)}$$

On pourra chercher des constantes réelles a, b, c telles que

$$x \in \mathbb{R} - 1, \qquad f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

Construire la courbe représentative (C).

b. Déterminer une primitive F de la fonction f.
Calculer l'aire S du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 5$.

2. Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par $\mathcal{T}$ la transformation ponctuelle définie analytiquement par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{6}{5} \\ y' &=& -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{12}{5} \end{array}\right.$$

a. Déterminer l'ensemble des points du plan affine invariants par $\mathcal{T}$.

b. Montrer que $\mathcal{T}$ est une isométrie involutive du plan affine.

c. Déterminer l'image par $\mathcal{T}$ de la droite du plan affine qui a pour équation $x = 1$.

d. Préciser la nature de $\mathcal{T}$ et en déduire (sans nouveaux calculs) l'image de la droite Δ du plan affine qui a pour équation $2x - y - 1 = 0$.

e. Montrer que C est invariante par $\mathcal{T}$.

3. Soit ρ la rotation vectorielle transformant $\overrightarrow{u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ ;\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ en $\overrightarrow{u'}\,(1\ ;\ 0)$. Soit R la rotation du plan affine associée à ρ et laissant invàriant le point $\Omega(1\ ;\ 1)$.

a. Quel est le transformé de Δ par R ?

b. Déterminer analytiquement cette transformation R.

c. Quel est le transformé (H) de (C) par R ?

d. Déterminer par leurs coordonnées les sommets et les foyers de la courbe (H) dont on précisera la nature et en déduire les coordonnées des sommets et des foyers de la courbe (C) dont on précisera la nature.

N. B. Bien que le thème principal de ce problème soit l'étude de la courbe (C) définie par son équation dans la première question, les trois parties du problème peuvent être abordées séparément.