Baccalauréat C Rouen juin 1980

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation $z^{12} = 1$. Donner les solutions sous forme trigonométrique puis algébrique.
2. u désignant un nombre complexe différent de 1, calculer au moyen des seuls u^{n+1} et u

$$1 + u + u^2 + \cdots + u^n.$$

3. Donner les solutions de l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$, par exemple en utilisant les questions précédentes.

EXERCICE 2 **POINTS**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel $k \leqslant n$, on pose

$$I_{k,\ n} = \int_0^1 \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x.$$

(On rappelle que C_n^k désigne le nombre de parties de k éléments dans un ensemble de n éléments).
À l'aide d'une intégration par parties, dont on justifiera la validité, comparer $I_{k,\ n}$ et $I_{k+1,\ n}$.
En déduire $I_{k,\ n}$ en fonction de n.

PROBLÈME **POINTS**

Partie A

Le plan affine $\mathcal{P}$ est associé au plan vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{P}}$; $\mathcal{D}$ est une droite de $\mathcal{P}$ qui a pour direction $\overrightarrow{\mathrm{D}}$ de $\overrightarrow{\mathrm{P}}$, $\overrightarrow{\Delta}$ est une droite vectorielle de $\overrightarrow{\mathrm{P}}$, distincte de $\overrightarrow{\mathrm{D}}$; k est un réel *non nul.*
À tout point M du plan $\mathcal{P}$, on associe le point M_1 image de M par la projection sur $\mathcal{D}$ suivant la direction $\overrightarrow{\Delta}$, puis le point M' tel que $\overrightarrow{M_1M'} = k\overrightarrow{M_1M}$.
L'application a_k de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ainsi définie est appelée *affinité d'axe $\mathcal{D}$, de direction $\overrightarrow{\Delta}$, de rapport k.*

1. **a.** $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{\Delta}$ étant données, on désigne par $\mathcal{A}_{\mathcal{D},\ \overrightarrow{\Delta}}$ l'ensemble des affinités d'axe $\mathcal{D}$, de direction $\overrightarrow{\Delta}$, lorsque k décrit $\mathbb{R}^\star$, ensemble des réels non nuls.

   Montrer que a_k admet une application réciproque a_{k-1} que l'on déterminera. a_k peut-elle être involutive ? En reconnaître alors la nature. Déterminer l'ensemble des points invariants par ak' Montrer que $\mathcal{A}_{\mathcal{D},\ \overrightarrow{\Delta}}$, muni de la composition des applications est un sous-groupe du groupe des bijections du plan.

   b. $\mathcal{D}'$ est une droite affine de $\mathcal{P}$, de direction $\overrightarrow{\Delta}$ distincte de $\overrightarrow{\mathrm{D}}$. Elle coupe $\mathcal{D}$ en O ; a'_k est l'affinité d'axe $\mathcal{D}'$, de direction $\overrightarrow{\mathrm{D}}$, de même rapport que a_k.

   Montrer que $a'_k \circ a_k$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

2. $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ tel que $\text{O} \in \mathscr{D}$, $\overrightarrow{\imath} \in \overrightarrow{\text{D}}$, $\overrightarrow{\jmath} \in \overrightarrow{\Delta}$.

  a. Définir analytiquement a_k ; en déduire que a_k est une application affine et déterminer l'endomorphisme associé α_k.

  b. d est une droite affine de $\mathscr{P}$, non parallèle aux axes de coordonnées. Montrer que l'image de d est une droite d' coupant d en un point de $\mathscr{D}$.

  c. On suppose que $\mathscr{P}$ est le plan affine euclidien, que $\overrightarrow{\text{D}}$ et $\overrightarrow{\Delta}$ sont orthogonales et que le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est orthonormé. E est la courbe dont une équation rapportée au repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est

$$4x^2 + y^2 - 16x - 8y + 28 = 0.$$

   i. Reconnaître la nature de la conique E. En préciser le centre, les sommets, les foyers, l'excentricité. La dessiner .

   ii. $a_{\frac{1}{2}}$ étant l'affinité d'axe $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath}\right)$, de direction $\overrightarrow{\Delta}$, de rapport $\dfrac{1}{2}$; $a'_{\frac{1}{2}}$ l'affinité d'axe $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, de direction $\overrightarrow{\text{D}}$, de même rapport $\dfrac{1}{2}$.
   Déterminer l'image E_1 de E par $a_{\frac{1}{2}}$, puis l'image E_2 de E_1 par $a'_{\frac{1}{2}}$.
   Pouvait-on déterminer directement E_2 à partir de E ? Dessiner E_1 et E_2 sur le même dessin que E.

Partie B

Pour tout réel non nul k, on définit la fonction numérique de variable réelle x par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = x - 1 + k\text{e}^{-x}.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}^\star$, la fonction f_k et sa dérivée f'_k vérifient une relation indépendante de k.

2. Étudier suivant les valeurs de k le sens de variation de la fonction f_k ainsi que ses limites aux bornes de l'ensemble de définition. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_k$ représentatives des fonctions f_k dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ admettent la même asymptote oblique d'équation $y = x - 1$ (on ne cherchera pas s'il existe une asymptote lorsque x tend vers $-\infty$).

3. Soit $\text{O}'(1~;~0)$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\jmath}$.
Écrire l'équation de la courbe $\mathscr{C}_k$ rapportée au repère $\left(\text{O}',\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
En déduire que toutes les courbes $\mathscr{C}_k$ se déduisent de $\mathscr{C}_1$ par une affinité dont on déterminera l'axe, la direction et le rapport. Que peut-on dire en particulier de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{-1}$?

4. En utilisant la fonction vectorielle $\overrightarrow{F_k}$ de la variable réelle x définie par

$$\overrightarrow{F_k}(x) = x\overrightarrow{\imath} + f_k(x)\overrightarrow{\jmath}$$

déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{t_k}$ de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse x_0
Montrer que dans $\overrightarrow{\text{P}}$, $\overrightarrow{t_k}$ est l'image de $\overrightarrow{t_1}$ par un endomorphisme de $\overrightarrow{\text{P}}$ dont on donnera la matrice dans la base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
En utilisant le résultat établi au 2. a. en déduire que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse x_0 est l'image par a_k de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse x_0.

5. Tracer avec soin sur le même dessin les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_2$.
Donner une construction géométrique simple des tangentes à $\mathscr{C}_{-1}$ et à $\mathscr{C}_2$ aux points d'abscisse nulle de ces courbes.