∽ Baccalauréat C Rouen septembre 1970 ∾

EXERCICE 1

1. Montrer que l'on peut déterminer a et b tels que b

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{2x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}.$$

2. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_4^t \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_2 = \int_4^t \frac{2x}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

dans lesquelles t est un nombre supérieur à 4.

3. Étudier la limite de I_2 lorsque t tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On donne, dans le plan orienté, un triangle équilatéral ABC de centre O, tel que

$$\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = +\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

1. Après avoir décomposé la rotation $\mathscr{R}\left(\text{O}, \frac{2\pi}{3}\right)$ de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ en un produit de deux symétries-droite, convenablement choisies, calculer le produit, $\mathscr{P}$, de la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ par la symétrie $\mathscr{S}_{[\text{OA}]}$ par rapport à la droite OA ; c'est-à-dire $\mathscr{P} = \mathscr{S}_{[\text{OA}]} \circ \mathscr{R}\left(\text{O}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

   Calculer de la même façon

$$\mathscr{P}' = \mathscr{R}\left(\text{O}, \frac{2\pi}{3}\right) \circ \mathscr{S}_{[\text{OA}]}$$

2. On désigne par E l'ensemble des six transformations ponctuelles définies de la manière suivante : f_0 : transformation identique,

   $f_1 = \mathscr{R}\left(\text{O}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\quad f_2 = \mathscr{R}\left(\text{O}, -\frac{2\pi}{3}\right)$

   $f_3 = \mathscr{S}_{[\text{OA}]}$, $\quad f_4 = \mathscr{S}_{[\text{OB}]}$ et $f_5 = \mathscr{S}_{[\text{OC}]}$.

   On définit dans cet ensemble la loi notée $\circ$ qui fait correspondre à deux transformations leur produit.

   Dresser la table de cette opération.

EXERCICE 3

On donne dans le plan complexe le point M d'affixe Z, le point m, distinct de l'origine O et d'affixe z, le point F d'affixe 2, le point F$'$ d'affixe -6. On désigne par $\overline{z}$ le nombre complexe conjugué de z.

1. On définit Z par $Z = \frac{4}{z}$.

   Calculer le module et l'argument de Z en fonction de ceux de z.

   Démontrer que la transformation ponctuelle définie par $Z = \frac{4}{z}$ est une inversion, dont on précisera le pôle et la puissance.

   Déterminer les coordonnées X et Y du point M en fonction des coordonnées x et y du point m, puis les coordonnées x et y en fonction de X et Y.

2. Au cercle (C) de centre F et de rayon R on associe le cercle (C') de centre F$'$ et de rayon R' tel que

$$R' = R + 4$$

(F$'$ et F sont les points définis au début du problème).

Déterminer les valeurs de R pour lesquelles les cercles (C) et (C') sont sécants.

Lorsque (C) et (C') sont sécants, quel est l'ensemble (W) de leurs points communs quand R varie ? On donnera une solution géométrique.

3. On désigne par (γ) et par (γ') les figures respectivement transformées de (C) et (C') par l'inversion $\mathcal{I}$ de pôle O et de puissance 4.

Montrer que l'ensemble des cercles (γ) est un faisceau, dont on déterminera la nature et les éléments.

Établir un résultat analogue pour les cercles (γ').

4. On désigne par (G) la courbe transformée de (W) par l'inversion $\mathcal{I}$.

En désignant par X et par Y les coordonnées du point M transformé de $m(x\,;\,y)$ de (W), déterminer la relation qui lie les coordonnées des points de (G).

5. Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction f définie par

$$X \xrightarrow{f} Y = X\sqrt{\frac{3(X+1)}{1-3X}}.$$

Déduire de cette étude la courbe transformée de (W) par l'inversion $\mathcal{I}$.

N. B. - À l'exception de la question 4, les autres questions du problème peuvent être abordées séparément.