**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat C Rouen juin 1969 ∾

**EXERCICE 1**

1. Calculer $(1+\mathrm{i})^2$.
2. Résoudre dans le corps des complexes l'équation

$$z^6-(1-\mathrm{i})z^{-}\mathrm{i}=0.$$

**EXERCICE 2**

On considère la fonction $f$ de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x)=x-1+\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Étudier les variations de cette fonction. Construire la courbe représentative, $(C)$, dans un repère orthonormé d'axes $x'x$, $y'y$. On étudiera les branches infinies de $(C)$.
2. Calculer l'aire, $S(m)$, du domaine limité par l'axe $y'y$, la courbe $(C)$ et les droites d'équations $y=x-1$ et $x=m$, $m$ étant un nombre positif donné.
   Cette aire a-t-elle une limite quand $m$ tend vers $+\infty$ ?

**PROBLÈME**

On donne un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$. On considère les deux fonctions vectorielles de la variable réelle définies par

$$\begin{array}{rrcl} & t\longmapsto\overrightarrow{V_1(t)} & = & (a\cos\alpha t)\overrightarrow{\imath}+(a\sin\alpha t)\overrightarrow{\jmath}\\ \text{et} & t\longmapsto\overrightarrow{V_2(t)} & = & (b\cos t)\overrightarrow{\imath}-(b\sin t)\overrightarrow{\jmath}\ ,\end{array}$$

où $a$ et $b$ sont deux nombres positifs donnés $(0<b<a)$ et où $\alpha$ est un entier positif non nul.

1. On désigne par $M_1$ et $M_2$ les points tels que

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M_1}=\overrightarrow{V_1(t)}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{\mathrm{O}M_2}=\overrightarrow{V_2(t)}.$$

   Quels sont les ensembles, $(C_1)$ et $(C_1)$, des points $M_1$ et $M_2$ quand $t$ décrit $\mathbb{R}$ ?
   Montrer que $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M_2},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M_1}\right)\equiv(\alpha+1)t\pmod{2\pi}$.
   Combien existe-t-il de droites $M_1M_2$ passant par le point O ?
2. On considère le point $M$ tel que

$$(\alpha+1)\overrightarrow{\mathrm{O}M}=\overrightarrow{\mathrm{O}M_1}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{O}M_2}$$

   et la fonction vectorielle

$$t\longmapsto\overrightarrow{V_1(t)}=\overrightarrow{\mathrm{O}M}.$$

   **a.** Montrer que $M$ appartient à la droite $M_1M_2$.
   Soit $\overrightarrow{V'(t)}$ le vecteur dérivé de $\overrightarrow{V(t)}$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{V'(t)}\cdot\overrightarrow{V(t)}$.
   En déduire la construction de la tangente en $M$ à l'ensemble, (E), des points $M$. (On ne demande pas la construction de cet ensemble.)

**b.** Soit $\overrightarrow{V''(t)}$ le vecteur dérivé de $\overrightarrow{V'(t)}$. Quel est l'ensemble des points $N$ tels que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{V''(t)}$ ?

Déterminer $\alpha$ pour que cet ensemble soit l'ensemble $(C_1)$.

**3.** On suppose désormais que $\alpha = 1$.

**a.** Quel est l'ensemble, (E), des points $M$ ?

**b.** On pose $A = \dfrac{a+b}{2}$, $B = \dfrac{a-b}{2}$ et l'on suppose $t \neq k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Former l'équation de la tangente $(\Delta)$ à l'ensemble (E) au point $M$.

Montrer que $(\Delta)$ est médiatrice de $M_1M_2$ ?

Cette tangente coupe $x'x$ en $U$ et $y'y$ en $V$. Calculer $z = UV^2$ en fonction de $t$.

Montrer qu'il existe une valeur de $t$ comprise entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ pour laquelle la longueur $UV$ est minimale. (On calculera tg $t$.)

**c.** Montrer que les droites $x'x$ et $y'y$ sont les bissectrices de l'angle $M_1\text{O}M_2$.

La droite $M_1M_2$ coupe $x'x$ en $Q$ et $y'y$ en $P$.

Quelles sont les polaires de $P$ et de $U$ par rapport au cercle $(V)$, de centre $V$, passant par $M_1$ et $M_2$ ?

Montrer que le cercle $(V)$ coupe la droite $UV$ en deux points, $I'$ et $I$, conjugués harmoniques par rapport à $U$ et $M$.

En déduire les coordonnées des points $I'$ et $I$.

$I$ étant le point ayant une abscisse positive, quel est l'ensemble des points $I$ lorsque $t$ décrit l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ ?

**d.** Montrer que les coordonnées du milieu, $\omega$, de $IU$ sont

$$x = A\left(1 + \frac{1}{\cos t}\right) \quad \text{et} \quad Y = \frac{B}{2}\text{tg}\,\frac{y}{2}.$$

En déduire que l'ensemble, $(\Gamma)$, des points $\omega$ lorsque $t$ varie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ est une partie de la courbe d'équation

$$y = \frac{B}{2}\sqrt{\frac{x-A}{x}}.$$

Construire $(\Gamma)$.