Baccalauréat C Rouen juin 1974

EXERCICE 1

Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$3^{2n+1}+2^{n+2} \quad \text{est divisible par 7.}$$

EXERCICE 2

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme :

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$$

a et b étant deux nombres réels.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Donner une base de E et la dimension de E.
2. Dans le plan vectoriel réel P, on choisit une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\imath}\right)$ et on considère l'endomorphisme φ de P dont la matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\imath}\right)$ est A.
   Pour quelles valeurs de a et b, φ est-il une bijection de P sur P ?
   Déterminer suivant les valeurs de a et b le noyau de φ et l'image de P par φ.

PROBLÈME

1. Étudier la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\left|x^2+2x-3\right|}$$

   Dans le plan affine euclidien P, rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm), tracer la courbe représentative (C_1) de f, dont on déduira la courbe représentative (C_2) de $(-f)$. On montrera que la réunion de (C_1) et (C_2) est composée d'une ellipse (E) et d'une hyperbole (H) dont on précisera les éléments remarquables : sommets, asymptotes.
2. On définit dans P la symétrie oblique s dont l'ensemble des points invariants est la droite (d_1) d'équation : $2y-x-1=0$ et dont la direction est donnée par la droite (d_2) d'équation : $2y+x+1=0$.
   a. Former la matrice dans la base 0.j) de l'application linéaire S associée à s .
   b. Calculer en fonction de $(x ; y)$, coordonnées de M, les coordonnées $\left(x' ; y'\right)$ de $M'=s(M)$.
   c. Montrer que l'ellipse (E) est globalement invariante par s. Quels sont les transformés des axes de symétrie de (E) ?
3. Soit un point mobile P, dont les coordonnées par rapport au repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ sont, à l'instant t, définies par les relations :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x(t) & = & \text{e}^t+\text{e}^{-t}-1 \\ y(t) & = & \dfrac{1}{2}\left(\text{e}^t-\text{e}^{-t}\right) \end{array}\right.$$

   a. Montrer que la trajectoire de P est une partie de l'hyperbole (H) que l'on ne demande pas de préciser.

b. Quelles sont les composantes du vecteur-vitesse $\overrightarrow{\text{V}(t)}$ de P à l'instant t ?
Déterminer t pour que $\overrightarrow{\text{OP}}$ et $\overrightarrow{\text{V}(t)}$ soient colinéaires.
En déduire l'équation des tangentes à la trajectoire de P passant par O.

c. Quelles sont les composantes du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ de P à l'instant t ?
Montrer que l'ensemble des points R tels que $\overrightarrow{\text{OR}} = \overrightarrow{\Gamma(t)}$ se déduit de la trajectoire de P par une transformation simple que l'on précisera. En déduire une construction de $\overrightarrow{\text{PS}} = \overrightarrow{\Gamma(t)}$.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{V}(t)} \cdot \overrightarrow{\Gamma(t)}$ et étudier son signe.
Que peut-on en déduire pour le mouvement de P sur sa trajectoire ?