Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1975 Rouen ∾

EXERCICE 1

Soit le nombre complexe

$$z = 1 + \cos\varphi - \text{i}\sin\varphi$$

où φ désigne un nombre réel variable appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$.
Calculer en fonction de φ le module et l'argument de z et du nombre $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$ lorsqu'il est défini. (On désigne par $\overline{z}$ le conjugué de z).
Préciser les ensembles (Γ) et (Γ') des images respectives de z et z' construites dans le plan des complexes rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.

EXERCICE 2

Soit p un entier naturel premier.

1. Démontrer que si k est un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$, le nombre C_p^k est divisible par p.
   En déduire que, quel que soit l'entier n, le nombre $(n+1)^P - n^p - 1$ est divisble par p.
2. Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n,

   $$n^p \equiv n \pmod{p}.$$

   (On pourra faire un raisonnement par rérurrence sur n).
   Pour quelles valeurs de n a-t-on $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$?

PROBLÈME

f est la fonction définie par

$$f \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{2}\sqrt{6x^2 + 24x} \end{array} \right.$$

1. **a.** Étudier le comportement de la fonction f lorsque la variable devient infiniment grande, et montrer que la courbe représentative (C) de la fonction admet deux asymptotes dont on déterminera les équations,

   b. Étudier les variations de la fonction f. Est-elle dérivable dans tout son ensemble de définition ?
   Calculer

   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}, \qquad \lim_{x \to -4^+} \frac{f(x) - f(-4)}{x+4}$$

   Interpréter les résultats obtenus sur la courbe représentative (C).

   c. Construire la courbe représentative (C) de la fonction f, le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.
   Démontrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point, puis calculer l'abscisse de ce point.

2. Soit O′ le point tel que $\overrightarrow{\text{OO}'} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

Écrire l'équation $Y = F(X)$ de la courbe (C) rapportée au repère $\left(\text{O}', \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On désigne par (C') la courbe représentant dans le repère $\left(\text{O}', \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la fonction G définie par

$$G(X) = X - \frac{1}{2}\sqrt{6x^2 - 24}.$$

Montrer que (C') est symétrique de (C) par rapport au point O′.

Déduire de cette étude, l'ensemble (Γ) des points du plan rapportée au repère $\left(\text{O}', \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ dont les coordonnées X et Y sont liées par la relation

$$X^2 - 2Y^2 + 4XY - 12 = 0.$$

3. φ est l'endomorphisme du plan vectoriel euclidien $\mathscr{P}$, défini par sa matrice dans la base orthonormée $\left(\vec{\imath}, \vec{\imath}\right)$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

a. φ est-il un automorphisme du plan vectoriel?
φ est-il involutif?

b. Étant donné un nombre réel λ, on pose

$$\text{E}_\lambda = \left\{\vec{u}\ ;\ \vec{u} \in \mathscr{P} \quad \text{et} \quad \varphi\left(\vec{u}\right) = \lambda\vec{u}\right\}.$$

Montrer qu'il existe deux valeurs réelles de λ pour lesquelles $\text{E}_\lambda \neq \left\{\vec{0}_{\mathscr{P}}\right\}$. (Ces valeurs seront notées λ_1 et λ_2 ; $\lambda_1 > 0$)

Démontrer que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont deux droites vectorielles orthogonales.

Calculer $\vec{I} \in \text{E}_{\lambda_1}$ et $\vec{J} \in \text{E}_{\lambda_2}$ tels que $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$ soit une base orthonormée.

4. $(X\ ;\ Y)$ étant les coordonnées d'un point M du plan affine euclidien rapporté au repère $\left(\text{O}', \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et $\left(X'\ ;\ Y'\right)$ les coordonnées du même point M dans le plan rapporté au repère $\left(\text{O}', \vec{I}, \vec{J}\right)$, exprimer X et Y en fonction de X' et Y'.

Écrire l'équation de la courbe (Γ) de la deuxième question lorsque cette courbe est rapportée au repère $\left(\text{O}', \vec{I}, \vec{J}\right)$.

Reconnaître la courbe (Γ).