Durée : 4 heures

Baccalauréat C Rouen juin 1976

EXERCICE 1

k étant un entier relatif, on pose :

$$x = 2k - 1 \qquad\qquad y = 9k + 4$$

Montrer que tout diviseur commun à x et à y divise 17.
En déduire, suivant les valeurs de k, le plus grand diviseur commun de x et y.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes le système

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2\mathrm{i}z_1 - \phantom{2\mathrm{i}}z_2 & = & 1-6\mathrm{i}\\ z_1 + 2\mathrm{i}z_2 & = & \mathrm{i}\end{array}\right.$$

2. Dans un plan affine euclidien orienté identifié au plan complexe, déterminer les rotations de mesure $+\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ transformant le point m_1 d'affixe z_1 en le point m_2 d'affixe z_2.

PROBLÈME

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{A}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition de deux fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des applications $f \in \mathcal{A}$ admettant, pour tout entier naturel non nul n, une dérivée d'ordre n notée $f^{(n)}$ (ou f' pour $n = 1$, f'' pour $n = 2, \ldots$).

Partie A

1. a. Montrer que $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b. On considère l'ensemble E des applications de $\mathcal{A}$ définies par :

$$f_{a,\,b}(x) = a\mathrm{e}^{2x} + b\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{avec } (a\,;\,b) \in \mathbb{R}^2$$

Établir que E est un espace vectoriel de base $\left(f_{1,\,0}\,;\,f_{0,\,1}\right)$ tel que :

$$\forall f_{a,\,b} \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(f''_{a,\,b} - 4f_{a,\,b}\right)(x) = 0$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, l'application ϕ_n dans $\mathcal{A}$ qui à $f_{a,\,b} \in E$ associe $f^{(n)}_{a,\,b}$ est un endomorphisme de E ; en donner la matrice dans la base $\left(f_{1,\,0}\,;\,f_{0,\,1}\right)$.
En déduire que :

a. Pour n pair, ϕ_n est une homothétie vectorielle dont on précisera le rapport.

b. pour n impair, ϕ_n est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie vectorielle qu'on précisera.

3. a. Montrer que P, ensemble des fonctions paires de E, et J, ensemble des fonctions impaires de E, sont deux droites vectorielles de E de base respective $f_{1,\,1}$ et $f_{1,\,-1}$ telles que :

$$E = P \oplus J.$$

(P et J supplémentaires dans E).

b. Étudier les variations des fonctions $f_{1,\,1}$ et $f_{1,\,-1}$.
Tracer leurs courbes représentatives dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé.
Vérifier que $f_{1,\,-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; définir sa bijection réciproque.

Partie B

On pose, pour f et g de $\mathscr{D}$:

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Établir que :

$$\forall (f,\,g,\,h) \in \mathscr{D}^3, \quad (f+g)\star h = (f\star h)+(g\star h)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (f\,;\,g) \in \mathscr{D}^2, \quad (\alpha f)\star g = \alpha(f\star g)$$

b. A étant l'élément de $\mathscr{D}$ défini par :

$$A(x) = 2x^2 - 1$$

calculer $\left(f_{1,\,0}\star A\right)(x)$ et $\left(f_{0,\,1}\star A\right)(x)$.
(On pourra intégrer par parties).

2. Déduire du B 1. que l'application

$$\phi : f \in \mathscr{D} \longmapsto f\star A \in \mathscr{A}$$

est linéaire et que l'image $\phi(E)$ de E par ϕ est un espace vectoriel de dimension 2 dont on précisera une base.