Baccalauréat C Rouen juin 1977

EXERCICE 1 **3 POINTS**

On considère la fonction f :

$$f : x \longmapsto f(x) = \frac{x-2}{(2x-3)^2}.$$

Montrer qu'il existe deux réels A et B tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\},\quad f(x) = \frac{A}{(2x-3)^2} + \frac{B}{2x-3}$$

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2}\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad f(z) = z^3 + bz^2 + cz + d$$

où b, c, d sont trois nombres complexes.
Déterminer b, c, d sachant que

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(\mathrm{i}) & = & 0 \\ f(1) & = & -4\mathrm{i} \\ f(-\mathrm{i}) & = & -8\mathrm{i} \end{array}\right.$$

b, c, d étant choisis, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

PROBLÈME **14 POINTS**

Dans le plan affine (P) rapporté au repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ on définit la loi de composition interne notée $\star$, qui au couple de points $(M\,;\ M')$ de coordonnées respectives $(x\,;\ y)$, $\left(x'\,;\ y'\right)$ associe le point m de coordonnées $\left(xx'\,;\ xy' + x'y\right)$.

Partie A

1. On appelle $\left(\mathrm{P}^\star\right)$ l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\ y)$ de (P) tels que x soit différent de 0.
   Démontrer que $\left(\mathrm{P}^\star\right)$ est stable pour la loi $*$.
   Par abus de langage, la loi induite par $\star$ sur $\left(\mathrm{P}^\star\right)$ sera encore notée $\star$.
   Démontrer que $\left(\mathrm{P}^\star,\ \star\right)$ est un groupe commutatif.
   Soit (P_1) l'ensemble des points de $\left(\mathrm{P}^\star\right)$ d'ordonnée nulle.
   Démontrer que $(\mathrm{P}_1,\ \star)$ est un sous-groupe de $\left(\mathrm{P}^\star,\ \star\right)$ isomorphe à $\left(\mathbb{R}^\star,\ \times\right)$.
2. Soit $\mathrm{A}(a\,;\ b)$ un point donné de $\left(\mathrm{P}^\star\right)$.
   On appelle φ_{A} l'application de (P) vers (P) qui au point M associe le point M' vérifiant :

   $$\varphi_{\mathrm{A}}(M) = M' = \mathrm{A} \star M$$

   Calculer les coordonnées de M' en fonction de celles $(x\,;\ y)$ de M.
   Montrer que φ_{A} est une application affine de (P) .

Donner la matrice de l'endomorphisme associé dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Reconnaître φ_{I} où I est l'élément neutre de $\left(\text{P}^{\star}, \star\right)$ et φ_{N} où N est un point quelconque de (P_1).

Déterminer les points invariants de φ_{A}. Discuter suivant A.

Partie B

On se propose de rechercher les fonctions numériques réelles f définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{\star}$, telles que la représentation graphique $\left(\Gamma^{\star}\right)$ de f dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ soit un sous-groupe de $\left(\text{P}^{\star}, \star\right)$.

1. On suppose que le problème admet une solution f de représentation graphique $\left(\Gamma^{\star}\right)$.

Soit M_1 et M_2 deux points quelconques de $\left(\Gamma^{\star}\right)$ d'abscisses respectives x_1 et x_2. En écrivant que $\left(\Gamma^{\star}\right)$ est stable pour $\star$, établir une relation (1) liant f, x_1 et x_2.

Soit g la fonction numérique réelle définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\star} \quad g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Quelle relation (2) lie g, x_1 et x_2 ?

Cette relation étant vérifiée quels que soient x_1 et x_2 réels non nuls, démontrer que g vérifie :

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} g(1) = 0 \;\; g(-1) = 0 \\ g \text{ est une fonction paire} \\ x \in R^{\star}, \quad g'(x) = \dfrac{g'(1)}{x} \end{array}\right.$$

En déduire la forme générale des fonctions g vérifiant (3), puis celle des fonctions f susceptibles de répondre à la question.

2. Vérifier que les représentations graphiques des fonctions f trouvées au B - 1. sont bien des sous groupes de $\left(\text{P}^{\star}, \star\right)$.

3. Soit (Γ_1) la courbe représentative dans (P) de la fonction f_1 définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\star}, \quad f_1(x) = x\text{Log}\,|x|.$$

a. Étudier les variations de f_1 et construire (Γ_1). Montrer que f_1 peut être prolongée par continuité pour $x = 0$ et que la courbe ainsi obtenue admet à l'origine une tangente que l'on déterminera.

b. Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la portion de plan comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 1$ avec $0 < \lambda < 1$. $\mathscr{A}(\lambda)$ admet-elle une limite quand λ tend vers 0 ? Pouvait-on le prévoir ?

4. Soit B le point de (Γ_1) d'abscisse e (base des logarithmes népériens), C le point de (Γ_1) d'abscisse $\dfrac{1}{\text{e}}$. La droite (IC) recoupe la courbe (Γ_1) en un point D. La droite (IB) recoupe la courbe (Γ_1) en un point E.

Démontrer sans calculs que $\text{E} = \text{B} \star \text{D}$

(On admettra que ces points E et D existent et sont uniques).

N. B. - La question B - 3. est indépendante de ce qui précède.