∽ Baccalauréat C Rouen juin 1978 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Linéariser l'expression :

$$f(x) = \cos^3 \cdot \sin^2 x$$

où x est réel.

2. Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Pour tout entier naturel n calculer le reste de la division par 7 de 5^n et de 4^n.
Comment faut-il choisir n pour que le nombre $5^n - 4^n$ soit divisible par 7 ?

PROBLÈME **13 POINTS**

Partie A

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. À tout couple $(a\ ;\ b)$ élément de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, on associe l'application $\varphi_{a,\ b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad \varphi_{a,\ b}(z) = az + b\overline{z} \quad (\overline{z}\ \text{étant le conjugué de}\ z)$$

1. Donner la nature de $\varphi_{1,\ 0}$ et de $\varphi_{-1,\ 0}$.
2. Démontrer que $\varphi_{a,\ b} = \varphi_{a',\ b'}$ si et seulement si $(a,\ b) = (a',\ b')$.
(On pourra par exemple calculer $\varphi_{a,\ b}(1)$ et $\varphi_{a,\ b}(\mathrm{i})$).
3. Démontrer que $\varphi_{a,\ b}$ est involutive si et seulement si $a,\ b, a\,\overline{a}$ et $\overline{b}$ vérifient simultanément deux relations que l'on précisera.

Partie A

Soit P un plan affine euclidien orienté et $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ un repère orthonormé direct de P.

Soit le nombre complexe $u = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1+2\mathrm{i})$.

On désigne par f l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe complexe z associe le point M_1 d'affixe complexe $z_1 = \varphi_{\frac{3}{4}\mathrm{i},\ 1+\frac{3}{4}\mathrm{i}}(z)$ et par h l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe complexe z associe le point M_2- d'affixe complexe $z_2 = \varphi_{0,\ u}(z)$.

I.

1. Calculer, pour tout point M de P de coordonnées $(x\ ;\ y)$, les coordonnées $\left(x_1\ ;\ y_1\right)$ de $M_1 = f(M)$ et les coordonnées $\left(x_2\ ;\ y_2\right)$ de $M_2 = h(M)$.
2. Démontrer que f est une application affine involutive. Donner la nature de f et ses éléments caractéristiques,
3. Démontrer que h est une symétrie orthogonale par rapport à une droite dont on déterminera une équation,

II.

À tout nombre réel θ on associe l'application $g_\theta = f \circ r_\theta \circ f$, où r_θ est la rotation de centre O et dont une détermination de la mesure de l'angle est θ.

Soit $\quad \mathcal{G} = \left\{g_\theta / \theta \in \mathbb{R}\right\}$.

1. **a.** Démontrer que $\mathcal{G}$ est stable pour la loi $\circ$.

   b. Démontrer que $\mathcal{G}$ muni de la loi $\circ$ est un groupe commutatif.

2. On définit dans P la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(\forall (M,\ N) \in \mathrm{P}^2) \quad [M \mathcal{R} N \iff \exists \theta \in \mathbb{R},\ N = g_\theta(M).$$

   Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence,

3. Déterminer la classe d'équivalence du point O pour la relation $\mathcal{R}$.

4. Soit A le point de coordonnées $(0\,;2)$.

   a. Démontrer que les coordonnées de $g_\theta(\mathrm{A})$ sont

$$(2\sin\theta\ ;\ 3\sin\theta + 2\cos\theta)$$

   b. Donner une équation de la classe d'équivalence Γ_A du point A pour la relation $\mathcal{R}$.

   c. On considère les deux fonctions numériques de variable réelle F_1 et F_2 définies par :

$$F_1(x) = \frac{3}{2}x + \sqrt{4 - x^2} \quad \text{et} \quad F_2(x) = \frac{3}{2}x - \sqrt{4 - x^2}.$$

   On appelle $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ leurs courbes représentatives respectives dans P muni du repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$.

   Démontrer que $\Gamma_\mathrm{A} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Étudier F_1 et F_2 et tracer Γ_A. (On prendra $\left\|\overrightarrow{e}_1\right\| = \left\|\overrightarrow{e}_2\right\| = 2$, (unité le cm) et 3,6 comme valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de $\sqrt{13}$).

5. Déterminer une équation de $\Gamma_{\mathrm{A}'}$, transformée de Γ_A par h.

   Quelle est la nature de $\Gamma_{\mathrm{A}'}$?

   Tracer $\Gamma_{\mathrm{A}'}$ sur la même feuille que Γ_A.

   Quelle est la nature de Γ_A ?