∽ Baccalauréat C Rouen juin 1979 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

On dispose de deux dés cubiques dont chaque face a la même probabilité d'apparaître après un lancer.
L'un a une face numérotée 0, deux faces numérotées 1, trois faces numérotées 2 ; l'autre a trois faces numérotées 0, deux faces numérotées 1, une face numérotée 2.

1. On définit une variable aléatoire, X, par la somme des numéros de la face supérieure de chaque dé après un lancer simultané.
   Déterminer la loi de probabilité de X, calculer son espérance mathématique et sa variance.
2. Pour chaque lancer simultané des deux dés, on appelle succès la réalisation d'une somme égale à 4. On effectue n lancers des deux dés.
   Calculer n tel que l'espérance mathématique du nombre de succès soit égale à 1.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. Calculer $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

   a. Étudier les variations de f. Dessiner la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (On se contentera de déterminer les points de la courbe d'abscisses -1, 0 et 1 et les tangentes à la courbe en ces points ; on ne demande pas d'étudier les branches infinies).

   b. Dire pourquoi f admet une application réciproque g dont on déterminera le nombre dérivé pour la valeur $y_0=f\left(x_0\right)$ en fonction de y_0.

   c. y étant un réel fixé, résoudre $\mathrm{e}^{2x}-2y\mathrm{e}^{x}-1=0$.
   En déduire l'expression de g puis retrouver $g'\left(y_0\right)$.

PROBLÈME **13 POINTS**

Soit E un plan vectoriel r éel, P un plan affine de direction E et $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ un repère de P.
On considère les vecteurs

$$\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{2}\left(\vec{\imath}+\sqrt{2}\vec{\jmath}\right),\quad \overrightarrow{e_2}=\frac{1}{2}\left(\vec{\imath}-\sqrt{2}\vec{\jmath}\right).$$

et les points I , A et B de coordonnées respectives :

$$\left(-\frac{1}{2}~;~0\right)\quad\left(0\frac{1}{2}~;~\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad\text{et}\quad\left(0\frac{1}{2}~;~-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

On désigne par :

- Δ_1 et Δ_2 les droites vectorielles engendrées respectivement par $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$;
- D_1 et D_2 les droites affines contenant I et de directions respectives Δ_1 et Δ_2.

Partie A

1. **a.** Démontrer que $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est une base de E.

   b. On appelle p_1 la projection vectorielle sur Δ_1 de direction Δ_2 et p_2 la projection vectorielle sur Δ_2 de direction Δ_1. Démontrer que :

$$p_1 + p_2 = \mathrm{Id}_E, \quad p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = \theta_E \quad \text{et } p_1 \circ p_1 = p_1.$$

   (Id_E est l'application identique de E et θ_E l'application nulle de E).

2. À tout nombre réel k non nul, on associe l'endomorphisme de E,

$$\varphi_k = k \cdot p_1 + \frac{1}{k} \cdot p_2$$

   et on désigne par Φ(E) l'ensemble des φ_k lorsque k décrit $\mathbb{R}^\star$.

   a. Démontrer que $\varphi_k\left(\overrightarrow{e_1}\right) = k \cdot \overrightarrow{e_1}$ et $\varphi_k\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{e_2}$.

   b. En déduire que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \Phi(\mathrm{E}) \\ k & \longmapsto & \varphi_k \end{array}$$

   est bijective.

   c. Exprimer $\varphi_k \circ \varphi_{k'}$ en fonction de k, k', p_1 et p_2.

Partie B

Un appelle f_k l'application affine de P, d'endomorphisme associé φ_k et laissant I invariant.
Soit G l 'ensemble des application f_k quand k décrit $\mathbb{R}^\star$.

1. Démontrer que G est stable pour la loi $\circ$ et que f_1 est l'application identique de P.
   (On pourra utiliser des résultats de A).

2. Soit $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathrm{G} \\ k & \longmapsto & f_k \end{array}$.

   a. Démontrer que ψ est un isomorphisme de $\left(\mathbb{R}^\star, \times\right)$ sur $(G, \circ)$ et préciser la structure de $(G, \circ)$.

   b. Pour tout entier naturel n, on définit f_k^n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_k^0 & = & f_1 \\ f_k^n & = & f_k^{n-1} \circ f_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star \end{array}\right.$$

   Démontrer que pour tout entier naturel n, $f_k^n = f_{k^n}$.

Partie C

Soit H la courbe dont une équation dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est :

$$2x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0.$$

1. Démontrer que H est une hyperbole admettant D_1 et D_2 comme asymptotes. Dessiner H. Indiquer les points d'intersection avec l'axe des ordonnées.

2. **a.** Soit M un point de coordonnées $(x\,;\,y)$, démontrer qu'il existe un couple de réels $(\alpha\,;\,\beta)$ unique, tel que M soit le barycentre du système pondéré : (A, α) (B, β) (I, $1 - \alpha - \beta$).

   b. Démontrer qu'un point M appartient à H, si et seulement si le couple $(\alpha\,;\,\beta)$ déterminé à la question précédente satisfait à $4\alpha\beta + 1 = 0$.

   c. Démontrer que H est globalement invariante par toute application f_k de G.

Partie D

1. Démontrer que toute application f_k de G, transforme tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ en le point M' de coordonnées $\left(x', y'\right)$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & \frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(k-\frac{1}{k}\right)y-\frac{1}{2}\\ y & = & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(k-\frac{1}{k}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)y\end{array}\right.$$

2. On appellera, par la suite, $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples d'entiers naturels $(X\,;\,Y)$ tels que

$$2X^2-Y^2+2X+1=0.$$

a. Démontrer qu'un couple $(X\,;\,Y)$ appartient à $\mathcal{S}$ et satisfait à $X \leqslant 3$ si el seulement si $(X\,;\,Y)$ est égal à $(0\,;\,1)$ ou $(3\,;\,5)$.

b. Soit J et J$'$ les points de coordonnées respectives $(0\,;\,1)$ et $(3\,;\,5)$.
Démontrer qu'il existe un seul réel non nul k, tel que $f_k(\text{J}) = \text{J}'$.
On notera g l'application f_k ainsi déterminée. Vérifier que g transforme tout point M de coordonnées (x; y) en M' de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & 3x+2y+1\\ y' & = & 4x+3y+2\end{array}\right.$$

3. On définit une application $\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \to & P\\ n & \longmapsto & Q_n\end{array}$ en posant :

$Q_0 = J, \quad Q_n = g\left(Q_{n-1}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^{\star}.$

On désigne par $(a_n\,;\,b_n)$ les coordonnées de Q_n dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $(a_n\,;\,b_n)$ appartient à $\mathcal{S}$.

b. Calculer, pour tout entier naturel n, a_n et b_n en fonction de n.