∽ Baccalauréat C Rouen juin 1981 ∾

EXERCICE 1

a et b étant deux entiers naturels non nuls, soit d leur P.G.C.D. et m leur P.P.C.M.
Trouver tous les couples $(a,\ b)$ vérifiant le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} m & = & d^2 \\ m+d & = & 156 \\ a & \geqslant & b. \end{array}\right.$$

EXERCICE 2

On pose, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6-2\mathrm{i})z + 3 - 2\mathrm{i}.$$

1. Montrer que le polynôme $f(z)$ possède une, et une seule, racine réelle z_0 que l'on déterminera. En déduire une factorisation de $f(z)$ sous la forme $(z-z_0)\,Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme complexe du 3$^{\text{e}}$ degré que l'on précisera.
2. Vérifier que $Q(\mathrm{i}) = 0$; en déduire les solutions de l'équation

$$(z \in \mathbb{C}), \quad f(z) = 0.$$

3. On note P un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
   z_1, z_2 et z_3 désignant les solutions de l'équation : $Q(z) = 0$, on appelle M_0, M_1, M_2 et M_3 les points de P d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 et z_3.
   Montrer que $(M_1,\ M_2,\ M_3)$ est un triangle équilatéral dont le centre de gravité est M_0 et faire la figure correspondante.

PROBLÈME

Partie A

Soit a une constante réelle. F est l'endomorphisme du plan vectoriel défini par sa matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\imath}\right)$:

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -a^2 & a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau de F et l'image de F. Calculer A^2.
   Les deux premiers résultats laissaient-ils prévoir le troisième ?
2. I étant la matrice unité d'ordre 2, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(a\mathrm{I} + A)^n$. La formule du binôme de Newton est-elle applicable ? Expliquer pourquoi.

Partie B

Rappel : on nomme suites réelles les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Leur ensemble V, muni de l'addition des applications, et de la multiplication d'une application par un réel, constitue un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
a désignant un réel non nul, soit W l'ensemble des suites réelles u telles que

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2au_{n+1} - a^2 u_n.$$

1. Vérifier que W est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que l'application φ donnant de $u \in W$ l'image $(u_0,\ u_1)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel W vers l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Définir une base $\mathcal{B}$ de W dans laquelle u a pour coordonnées u_0 et u_1 dans cet ordre.

2. **a.** Évaluer u_n en fonction de n dans le cas où $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

b. Trouver toutes les suites géométriques de W.

c. Montrer, sans les calculer, l'existence et l'unicité des réels α et β tels que

$$(2) \qquad \forall n \in W, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha a^n + \beta n a^{n-1}.$$

d. Calculer α et β en fonction de u_0 et u_1.

3. À toute suite u élément de W, on associe la suite $u' = f(u)$ définie par

$$(3) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u'_n = u_{n+1}.$$

Vérifier que u' est élément de W et que f est un endomorphisme de W, dont on donnera la matrice M dans la base $\mathcal{B}$ définie au B 1.

4. Quelle est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice de l'application g donnant de $(u_0,\ u_1)$ l'image $(u_1,\ u_2)$?
Quelle est l'application qui donne de $(u_0,\ u_1)$ l'image $(u_n,\ u_{n+1})$?
En utilisant A) 2., retrouver l'expression de u_n à partir de u_0, u_1 et n.

Partie C

Dans le plan affine P, soit un point fixe O et la suite de points $M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots$ tels que

$$(4) \forall n \in \mathbb{N}, \quad \overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+2}} = 2a\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+1}} - a^2\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}.$$

1. On suppose $a \neq 1$. Soit G_{n+1} le barycentre de M_{n+1} et de M_n affectés respectivement des coefficients 1 et $-a$. Vérifier que G_{n+1} et G_{n+2} sont alignés avec O. Comment G_n se déduit-il simplement de G_{n-1} ?

2. Dans tout ce qui suit $a = \dfrac{1}{2}$, M_0 et M_1 ont pour coordonnées respectives $(2\,;0)$ et $(1\,;1)$ dans un repère d'origine O.
Placer sur un graphique (axes perpendiculaires, unité : 1 dm) les points M_0, M_1, G_1 et résumer très sommairement la construction par laquelle chacun des points G_2, M_2 se déduit des précédents.
Calculer, en fonction de n, les coordonnées x_n et y_n de M_n.
Les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ sont-elles convergentes ?
M_n a-t-il une position limite pour n infini ?

3. Soit dans le même plan P rapporté au repère précédent, la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2^{1-t} \\ y & = & t \cdot 2^{1-t} \end{array}\right. \qquad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Établir qu'il existe un point de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite $(\mathrm{O}M_0)$.

Montrer que son abscisse vaut $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$; quelle est son ordonnée ?

Placer la tangente à $\mathscr{C}$ en Mo. Établir l'existence d'une tangente en 0 à C v fOl.

4. Former une équation cartésienne de la courbe $\mathscr{C}$.

5. Au moyen d'une intégration par parties, calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto x\mathrm{Log}\, x$.
En déduire l'aire de $\mathscr{E}$, partie du plan P délimitée par le segment $\mathrm{O}M_0$ et l'arc $\mathrm{O}M_0$ de $\mathscr{C}$.