Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1982 Rouen

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre l'équation d'inconnue $(x\,;\ y)$ élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$661x-991y=1.$$

On pourra remarquer que

$$1\,982=2\times 991 \quad \text{et} \quad 1\,983=3\times 661.$$

2. On considère deux suites arithmétiques (u_n) et (v_n) définies par

$$\left\{\begin{array}{lcllcl} u_0 & = & 3, & v_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & u_n+991, & v_{n+1} & = & v_n+661 \quad \forall n\in\mathbb{N}. \end{array}\right.$$

Indiquer tous les couples $(p\,;\ q)$, avec p et q entiers naturels inférieurs à 2 000, tels que $u_p=v_q$.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel réel, de dimension 2 ou 3, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{V}$, chacun distinct de $\{0\}$ et de $\mathcal{V}$.
On désigne par
p la projection vectorielle sur $\mathcal{A}$, de direction $\mathcal{B}$
q la projection vectorielle sur $\mathcal{B}$, de direction $\mathcal{A}$,
e l'identité dans $\mathcal{V}$.
On rappelle que l'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ des endomorphismes de $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel réel pour l'addition des endomorphismes et la multiplication d'un endomorphisme par un réel.
Soit $F=\{ap+bq\,;\,(a\,;\ b)\in\mathbb{R}^2\}$.

1. Démontrer que F est un espace vectoriel réel. Démontrer que $(p\,;\ q)$ est une base de F.
2. Démontrer que F est stable pour la composition des endomorphismes.
3. Soit φ un élément de F. On pose $\varphi^0=e$ et, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $\varphi^{n+1}=\varphi\circ\varphi^n$.
   Calculer φ^n.
4. Déterminer l'ensemble des projections vectorielles éléments de F. Donner leurs éléments caractéristiques.

PROBLÈME **12 points**

Le plan P affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. On désigne par $\text{P}^\star$ le plan P privé du point O.
Un point quelconque M ayant pour coordonnées x et y par rapport au repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ a pour affixe le nombre complexe $z=x+\text{i}y$; on note $\overline{z}$ le conjugué de z; on désigne par $[r,\ \theta]$ le nombre complexe qui s'écrit $r(\cos\theta+\text{i}\sin\theta)$ avec r élément de $\mathbb{R}_+$ et θ élément de $\mathbb{R}$.

Partie A

Étant donné un nombre complexe a non nul, on considère l'application φ_a de $\mathrm{P}^\star$ dans $\mathrm{P}^\star$ qui à chaque point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = \dfrac{a}{z}$.

1. Cette application est-elle bijective ?
   Déterminer suivant les valeurs de a l'ensemble des points invariants par φ_a.
2. Déterminer la nature de l'application composée $\varphi_b \circ \varphi_a$, a et b étant des nombres complexes non nuls.
   Montrer que $\varphi_a \circ \varphi_a$ est la restriction à $\mathrm{P}^\star$ d'une isométrie de P dont on déterminera la nature et les éléments remarquables en fonction de l'argument de a.
   Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier a pour que φ_a soit involutive ?

Partie B

Dans cette partie, a est un réel strictement positif.

1. En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :
   φ_a est -elle bijective ?
   Quel est l'ensemble des points invariants par φ_a ?
   b étant aussi un réel strictement positif, quelle est la nature de $\varphi_b \circ \varphi_a$?
   φ_a est-elle involutive ?
2. M' étant l'image de M par l'application φ_a calculer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M, puis les coordonnées x et y de M en fonction des coordonnées x' et y' de M'. z' étant l'affixe de M', on pose $z' = [r',\ \theta']$, calculer r' et θ' en fonction de r et θ.
   Dans la suite du problème, on se servira, suivant les questions, soit de la relation $z' = \dfrac{a}{z}$, soit des relations donnant x' et y' en fonction de x et y, soit celles donnant x et y en fonction de x' et y', soit de celles donnant r' et θ' en fonction de r et θ.
3. Montrer que les points O, M et $M' = \varphi_a(M)$ sont alignés.
   Soit une droite (D) passant par O ; déterminer l'image par φ_a de (D) privée de O.
4. Soit un cercle (C) passant par O et centré sur l'axe des abscisses en un point d'abscisse c.
   Déterminer l'image par φ_a de (C) privé de O. En déduire l'image par φ_a d'une droite parallèle à l'axe des coordonnées et distincte de celui-ci.

Partie C

Soit (H) la courbe d'équation

$$x^2 - y^2 + 2x = 0$$

par rapport au repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que (H) est une hyperbole dont on indiquera centre, axes de symétrie, sommets, foyers, asymptotes. Dessiner (H) en prenant 4 cm pour unité sur chacun des deux axes.
2. Montrer que (H) est l'ensemble des points M d'affixe $z = [r,\ \theta]$ tels que $r = f(\theta)$ ou $f(\theta) = \dfrac{-2\cos\theta}{\cos 2\theta}$, θ décrivant un sous-ensemble de $[0\ ;\ 2\pi]$.
   En étudiant le signe de $f(\theta)$ suivant les valeurs de θ, vérifier que (H) se trouve située dans trois régions du plan limitées par des demi-droites d'origine O ; sur la figure, on hachurera les autres régions.
3. À partir de cette question, on suppose $a = 1$.
   Soit $\left(\Gamma^\star\right)$ l'image par φ_1 de (H) privée de O et soit $(\Gamma) = \left(\Gamma^\star\right) \cup \{\mathrm{O}\}$.
   Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M d'affixe $z = [r,\ \theta]$ tels que $r = g(\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$; calculer $g(\theta)$.

4. Montrer que (Γ) se trouve dans les mêmes régions que celles définies au 2. et qui contiennent (H).

Montrer que (Γ) admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

Placer les points invariants de (H) et calculer leurs coordonnées.

5. Soit A le point de (H) appartenant à l'axe des abscisses et dont l'abscisse est strictement négative.

Déterminer $\mathrm{A}' = \varphi_1(\mathrm{A})$.

Soit (Δ) la tangente en A à (H) ; déterminer l'image $\left(\Delta'\right)$ de (Δ) par φ_1 en utilisant la question B 4.

Construire $\left(\Delta'\right)$.

6. Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) est

$$y^2 = x^2\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right).$$

Soit (Γ_1) l'ensemble des points du plan P de coordonnées x et y telles que $y = x\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$.

En étudiant la fonction

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}} \end{array}$$

et en utilisant les questions précédentes, construire (Γ_1) sur le même graphique que (H), puis en déduire (Γ). Préciser les tangentes en O et en A′ à (Γ_1). Vérifier que (Γ) et $\left(\Delta'\right)$ ont la même tangente en A′.