Durée : 4 heures

Baccalauréat C Rouen septembre 1971

EXERCICE 1

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = x + \text{Log}\left|\frac{x-3}{x+\frac{3}{2}}\right|$$

où le symbole Log est celui des logarithmes népériens.

1. Étudier les variations de f.
2. Construire, dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, la courbe (C), représentative de f. On montrera l'existence d'une asymptote oblique (D) et l'on précisera la position de (C) par rapport à (D).
(La recherche des symétries n'est pas demandée.)

EXERCICE 2

Déterminer l'ensemble (E) des entiers relatifs n pour lesquels le reste de la division euclidienne par 5 de $2n^2 - 3n + 4$ est égal à 3.
En déduire quel peut être le chiffre des unités de l'écriture en base cinq, puis en base dix, des entiers naturels de (E).

PROBLÈME

Un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, d'axes $x'x$ et $y'y$, étant adopté sur le plan, on désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des courbes (C_m) ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - \frac{m+3}{\sqrt{3}}x + (m+1)y + m = 0,$$

m étant un paramètre réel.

1. Démontrer que, quel que soit m, (C_m) contient deux points fixes, dont l'un, A, a son abscisse nulle et l'autre, B, son ordonnée nulle. Préciser A et B. Quelle est la nature de $\mathscr{F}$?
2. On désigne par (Δ) la droite perpendiculaire en A à AB, par M le second point commun de (Δ) avec (C_m) et par M' le second point commun de l'axe $y'y$ avec (C_m).
Chercher en fonction de m les coordonnées de M et de M'.
Démontrer que, quel que soit m, la longueur de MM' est égale au rayon de (C_m).
3. On désigne par Z, Z' et Z_0 les affixes complexes de M, M' et B.
Démontrer que $\dfrac{Z' - Z_0}{Z - Z_0}$ est un nombre complexe indépendant de m.
Préciser son module et son argument. En déduire que M' est l'image de M dans une similitude plane directe S, dont on précisera le centre, le rapport et l'angle.
4. Soit T le point de la droite MM' d'ordonnée $(-2m)$.
Montrer que l'ensemble (P) des points T est une parabole, dont on précisera le foyer et la directrice et montrer que la droite MM' est tangente à (P) en T.

5. Une origine des instants étant adoptée, on suppose que le paramètre m est lié aux instants t par la relation

$$m = 1 - t^2$$

Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de M, M' et T.
Étudier le mouvement de chacun des points M et M' quand t décrit $\mathbb{R}$.