Durée : 4 heures

൴ Baccalauréat C septembre 1975 Rouen ൴

EXERCICE 1

On considère le nombre complexe :

$$z = \frac{1}{2}[\sin\varphi + \mathrm{i}(1+\cos\varphi)]$$

où φ désigne un nombre réel variable, différent de π, appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

1. Calculer en fonction de φ le module et l'argument de chacun des nombres z et $z' = -\frac{1}{z}$.
2. On désigne par M et M' les images respectives de z et z' construites dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; déterminer l'ensemble (Γ) des points M et l'ensemble $\left(\Gamma'\right)$ des points M' lorsque φ varie.

EXERCICE 2

1. On pose $f(t) = \text{Log}\left|\frac{t}{t+1}\right|$.
   Quel est le domaine de définition de f ?
   Quel est la dérivée de f ?
2. Pour tout nombre réel x, strictement positif, on pose

$$g(x) = \int_1^x \frac{\text{Log}\, t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

   Calculer $g(x)$ au moyen d'une intégration par parties
3. Étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\qquad \lim\limits_{x\to+0^+} g(x)$.

PROBLÈME

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
a et k sont deux réels ($a \neq 1$).
$T_{a,\,k}$ est l'application affine du plan dans lui-même qui au point $M(x ; y)$ fait correspondre $M_1\left(x_1 ; y_1\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{k-a}{1-a}x + \dfrac{1-k}{1-a}y \\ y_1 & = & \dfrac{a(k-1)}{1-a}x + \dfrac{1-ak}{1-a}y \end{array}\right.$$

Partie A

1. Déterminer suivant les valeurs de a et k l'ensemble des points invariants par $T_{a,\,k}$.
2. Étudier pour $T_{a,\,k}$ la possibilité d'être bijective et montrer que lorsque $T_{a,\,k}$ n'est pas une bijection, elle est une projection que l'on précisera.

3. L'application $T_{a,\ k}$ peut-elle être involutive ? Préciser alors sa nature et la définir géométriquement.

Partie B

On considère dans cette partie les applications $T_{a,\ k}$ pour lesquelles on a : $a = k$. L'application $T_{k,\ k}$ sera notée plus brièvement T_k ?
On pose $M_2 = T_k(M)$ et plus généralement, pour tout entier n supérieur à 1 : $M_n = T_k\left(M_{n-1}\right)$.

1. Montrer par récurrence que M_n a pour coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_n & = & y+\left(k^{n-1}+k^{n-2}+\ldots+k\right)(y-x)\\ y_n & = & y+\left(k^{n}+k^{n-1}+\ldots+k\right)(y-x)\end{array}\right.$$

Dans quels cas le point M_n admet-il une position limite N quand n augmente indéfiniment ? Quel est l'ensemble des points N ?

2. Soit $k = -\dfrac{1}{2}$. On considère les trois points

$$\text{A}(-1\,;+2),\quad \text{B}(+4\,;\,+2)\ \text{et}\ \text{C}(+3\,;\,-1)$$

et on désigne par M le centre de gravité du triangle ABC.
Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1$.
Que peut-on dire du centre de gravité M_n du triangle $\text{A}_n\text{B}_n\text{C}_n$ quand n augmente indéfiniment ?

3. L'application T_k peut-elle être une symétrie orthogonale par rapport à une droite ?