# Baccalauréat C Rouen septembre 1980

**EXERCICE 1**

$z$ étant un nombre complexe, on désigne par $p$ la fonction définie dans le corps des complexes $\mathbb{C}$ par

$$p(z) = z^3 - (3+5\text{i})z^2 - (5-16\text{i})z + 7 - 11\text{i}.$$

1. Trouver un nombre réel $z_0$ tel que $p(z_0) = 0$.
2. Déterminer $a$, $b$, $c$ complexes tels que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ p(z) = (z - z_0)\left(az^2 + bz + c\right),$$

3. Résoudre l'équation $p(z) = 0$. On désignera par $z_1$ la racine dont la partie réelle est positive, par $z_2$ celle dont la partie réelle est négative.
4. Dans le plan complexe rapporté au repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ on désigne par $\text{M}_0$, $\text{M}_1$, $\text{M}_2$ les points d'affixes respectives $z_0, z_1, s_2$.
   Quels sont l'angle et le rapport de la similitude directe de centre $\text{M}_0$ qui transforme $\text{M}_1$ en $\text{M}_2$ ?

**EXERCICE 2**

Dans le plan affine euclidien $\pi$, soit un rectangle de sommets consécutifs A, B, C, D.

1. P étant un point variable de $\pi$, on pose

$$f(\text{P}) = \overrightarrow{\text{PA}} + 2\overrightarrow{\text{PB}} + \overrightarrow{\text{PC}} + m\overrightarrow{\text{PD}},$$

   $m$ étant une constante réelle.
   Déterminer $m$ tel que M soit indépendant de P.
2. P étant un des points de l'ensemble {A, B, C, D} déterminer $m$ tel que $\left\|\overrightarrow{f(\text{P})}\right\|$ soit indépendant de P.

**PROBLÈME**

**Partie A**

Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+3}$$

et soit $C$ la courbe représentative de $f$ dans le plan euclidien P, rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier la variation de $f$.
2. M et M′ étant deux points distincts de $C$, d'abscisses opposées, montrer que MM′ garde une direction fixe.
   Quelle est l'application affine $s$ qui transforme M en M′ ?
   Quelle est l'image par $s$ de l'axe des abscisses ?
   Montrer que ces deux droites sont asymptotes à $C$.

3. Trouver tous les points de $C$ dont les deux coordonnées sont des entiers.
4. Tracer $C$.

**Partie B**

1. Montrer qu'il existe une bijection affine T de P, laissant invariants tous les points de l'axe des abscisses et donnant du point A, de coordonnées $(0 ; 2)$ l'image B, de coordonnées $(1 ; 2)$.
2. Pour tout point M de P, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, calculer les coordonnées de T(M) en fonction de $(x\ ;\ y)$.
3. Donner une équation de la courbe $C'$ dont l'image par T est la courbe $C$.
   Quelle est la nature géométrique de $C'$ ?

**Partie C**

1. Étudier la variation de la fonction $g$, définie dans $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \text{Log}\left(x + \sqrt{x^2+3}\right).$$
2. Étudier le signe et la limite lorsque $x$ tend vers $+\infty$ de la fonction de variable réelle $\varphi$ définie pour $x > 0$ par
$$\varphi(x) = \text{Log}\,\frac{x + \sqrt{x^2+3}}{2x}.$$
3. Tracer les courbes représentatives $\Gamma_1$ de la fonction définie par $g_1(x) = \text{Log}\,2x$ et $\Gamma$ de la fonction $g$ sur le même graphique que $C$.
   $\Gamma$ possède-t-elle un centre de symétrie ?

**Partie D**

Soit D l'ensemble des fonctions réelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On désigne par $\varphi$ tout élément de D vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \sqrt{(\varphi(x))^2 + 3}.$$

1. En appliquant à la *fonction dérivée* $\varphi'$ la formule de la moyenne entre les valeurs 0 et $x$ de la variable, montrer que
$$x > 0 \quad \text{implique} \quad \varphi(x) \geqslant \varphi(0) + x\sqrt{3}.$$
   En déduire la limite de $\varphi(x)$ pour $x \to +\infty$.
   Faire une étude analogue pour $x$ négatif.
2. Montrer que toute fonction $\varphi$ admet dans D une fonction réciproque $\theta$.