∽ Baccalauréat C Rouen septembre 1978 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & a+b \\ b & a \end{pmatrix}$ lorsque a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathscr{M}$, muni de l'addition des matrices et de la multiplication d'une matrice par un réel possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Trouver une base de cet espace vectoriel.
2. P étant un plan vectoriel euclidien, on définit l'application linéaire φ de P vers P, dont la matrice dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\imath}\right)$ est : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle un automorphisme involutif de P ?

EXERCICE 2 **3 POINTS**

L'application linéaire φ est celle définie dans la deuxième question de l'exercice 1 précédent.
λ étant un réel donné, on pose $E_\lambda = \text{Ker}\left(\varphi - \lambda\text{id}_\text{P}\right)$ (noyau de l'application linéaire $\varphi - \lambda\text{id}_\text{P}$).

1. Montrer que : $E_\lambda = \left\{\overrightarrow{u} \in \text{P} : \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u}\right\}$.
2. Montrer qu'il existe deux valeurs réelles distinctes de λ, pour lesquelles $E_\lambda \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. (On notera λ_1 la plus petite de ces valeurs, λ_2 l'autre).
3. Montrer que $_{\lambda_1}$ et $_{\lambda_2}$ sont deux droites vectorielles.

PROBLÈME **13 POINTS**

Soit $(\mathscr{S},\ +,\ \cdot)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites numériques (application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$). On note U la suite de terme général U_n.
On considère le sous-ensemble $\mathscr{T}$ de $\mathscr{S}$ des suites U vérifiant la propriété suivante :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (U_{n+2} = -4U_{n+1} + 5U_n)\,.$$

Partie A

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}$.
2. Soit u et v deux suites de $\mathscr{T}$. Démontrer que $u = v$ si et seulement si $(u_0,\ u_1) = (v_0,\ v_1)$.
3. Soit a et b deux suites de $\mathscr{T}$ telles que

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ b_0 = 0, b_1 = 1.$$

Démontrer que pour tout u de $\mathscr{T}$:

$$u = u_0 \cdot a + u_1 \cdot b.$$

En déduire la dimension de $\mathscr{T}$.

4. On considère la suite s de $\mathscr{T}$ définie par $s_0 = 6$ et $s_1 = 0$.
Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, s_{2n} est strictement positif et s_{2n+1} est strictement négatif.

Partie B

On considère la suite géométrique t de premier terme 1 et de raison α, α étant un réel non nul.

1. Déterminer α pour que t appartienne à $\mathcal{T}$. En déduire une nouvelle base de $\mathcal{T}$.

2. Calculer dans cette base les coordonnées de la suite s définie en A 4. En déduire que la suite s n'est pas convergente.

Partie C

Soit E un espace affine euclidien de dimension 2 muni du repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. On considère la suite des points M de E de coordonnées $(n~;~s)$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Démontrer que les points M_{2n} appartiennent à la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $y = 5\left(1+5^{x-1}\right)$ et que les points M_{2n+1} appartiennent à la courbe $(\mathcal{C}')$ d'équation $y = 5\left(1-5^{x-1}\right)$.

2. Étudier la fonction f définie par :

$$f(x) = 5\left(1+5^{x-1}\right).$$

Tracer les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

3. Calculer l'aire $\mathcal{A}_\lambda$ de la portion de plan limitée par les courbes $(\mathcal{C})$; $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$. $(\lambda < 0)$,

Déterminer la limite de $\mathcal{A}_\lambda$ quand λ tend vers $-\infty$.

Partie D

1. On désigne par x_n et y_n les coordonnées de tout point M_n. Déterminer les réels a, b, c, d tels que l'on ait, quelque soit n :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & ax_n + b\\ y_{n+1} & = & cy_n + d\end{array}\right.$$

2. Soit F l'application affine de E dans E qui à tout point $M(x~;~y)$ associe $M''\left(x''~;~y''\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'' & = & ax + b\\ y'' & = & cy + d\end{array}\right.$$

Démontrer que F est une bijection et déterminer le point O_1 tel que

$F\left(\text{O}_1\right) = \text{O}$.

Démontrer qu'il existe une translation T et une application affine G de E dans E telles que :

$$F = G \circ T \quad \text{et} \quad G(\text{O}) = \text{O}.$$

Pour tout point $M(x~;~y)$ d'image $M'\left(x'~;~y'\right)$ par G exprimer x' et y' à l'aide de x et de y.

3. Démontrer que pour l'application G :

a. l'ensemble des points invariants est une droite (D).

b. il existe une droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$ telle que pour tout point M d'image M' par G le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à $\overrightarrow{\Delta}$.

c. il existe un nombre réel k tel que pour tout point M (d'image M') de projection H sur (D) suivant la direction $\overrightarrow{\Delta}$ on ait $\overrightarrow{\text{H}M'} = k\overrightarrow{\text{H}M}$.

Préciser k.