Baccalauréat C Rouen septembre 1979

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. k et n étant deux entiers naturels strictement positifs calculer

$$F = \int_0^{\pi} (\sin kx)(\cos nx)\,\mathrm{d}x$$

   a. lorsque $k = n$

   b. lorsque $k = 2$, $n = 1$

2. n étant un entier naturel strictement positif, calculer

$$G = \int_0^{\pi} \left(x^2 - 2\pi x\right)(\cos nx)\,\mathrm{d}x$$

   en intégrant deux fois par parties.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

1. Soit x un entier relatif. Déterminer le reste de la division euclidienne de x^3 par 9, en discutant suivant les valeurs de x.
   En déduire que pour tout entier relatif x, on a :

$$\begin{array}{lcl}\left(x^3 \equiv 0 \quad [9]\right) & \iff & (x \equiv 0 \quad [3])\\ \left(x^3 \equiv 1 \quad [9]\right) & \iff & (x \equiv 1 \quad [3])\\ \left(x^3 \equiv 8 \quad [9]\right) & \iff & (x \equiv 2 \quad [3])\end{array}$$

2. On considère trois entiers relatifs x, y et z tels que $x^3 + y^3 + z^3$ soit divisible par 9. Démontrer que l'un des nombres $x,\ y,\ z$ est divisible par 3.

PROBLÈME **13 POINTS**

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x, définie par

$$f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^3 - x}$$

et sa courbe représentative (C), dans un repère orthonormé.

1. **a.** Montrer qu'il existe trois constantes réelles, α, β, γ telles que pour tout x de l'ensemble de définition de f on ait :

$$f(x) = x - \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{x-1} - \frac{\gamma}{x+1}$$

   b. Étudier les variations de la fonction f. Déterminer les asymptotes de la courbe (C) et son centre de symétrie.
   Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$.
   Tracer la courbe (C).

2. On considère la fonction polynôme P_a définie par

$$P_a(x) = x^4 - ax^3 - 6x^2 + ax + 1.$$

Vérifier, en utilisant les résultats sur les variations de f, que l'équation
$P_a(x) = 0$ admet, quel que soit le paramètre réel a, quatre racines réelles distinctes.

Partie B

On considère l'application φ, de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans $\mathbb{C}$, définie par

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

On note $\varphi(z) = \zeta$.
m désigne le point d'affixe z, M celui d'affixe $\varphi(z)$, A et A$'$ les points d'affixes respectives 1 et -1. On note $|z|$ le module de z. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $\varphi(z) = X + \mathrm{i}Y$ avec x, y, X et Y réels.

1. a. Exprimer X et Y en fonction de x et y.
b. Déterminer l'ensemble des points m tels que $\varphi(z)$ soit réel.
c. Déterminer l'ensemble des points m tels que $\varphi(z)$ soit imaginaire pur.

2. a. Quelles distances représentent $|1 - z|$ et $|1 + z|$?
Déterminer l'ensemble des points m tels que $|\varphi(z)| = 1$.
b. Démontrer que l'ensemble $(\mathscr{C}_k)$ des points m tels que $|\varphi(z)| = k$, où k est un réel strictement positif et différent de 1, est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Partie C

Soit z_1 un nombre complexe autre que -1, 0 et 1 et :

$$z_2 = \varphi(z_1), \quad z_3 = \varphi(z_2), \quad z_4 = \varphi(z_3), \quad z_5 = \varphi(z_4)$$

où φ est définie au **B**.

1. a. Exprimer z_2, z_3, z_4, z_5 en fonction de z_1.
Etudier les cas particuliers $z_1 = \mathrm{i}$ et $z_1 = -\mathrm{i}$.
b. Calculer $z_1 \cdot z_3$; $z_2 \cdot z_4$; $(z_1 + z_3) \cdot (z_2 + z_4)$.

2. On pose $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = a$.
Développer, réduire et ordonner $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$, exprimer le résultat en fonction de z et a.

3. On pose, pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ où x_n et y_n sont réels.
Montrer, en utilisant **B** 1. a. que les quatre nombres y_1, y_2, y_3, y_4 sont de même signe.
Que peut-on dire de z_1, z_2, z_3, z_4 si a est réel ?
Quel résultat du **A** retrouve-t-on ainsi ?