Baccalauréat C septembre 1981 Rouen

EXERCICE 1

Soit f l'application de $]0~;~\pi[$ dans $\mathbb{R}$ donnant de x l'image

$$f(x) = \text{Log}\,\text{tg}\,\frac{x}{2}.$$

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\text{tg}\,\dfrac{x}{2}$

   Étudier la variation de f.

   Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}\text{Log}\,3$.
2. Dire pourquoi f possède une application réciproque g (on ne cherchera pas à calculer $g(x)$).

   Figurer sur le même graphique, rapporté à un repère orthonormé, les courbes représentatives F et G de ces deux fonctions.

   Possèdent-elles chacune un centre de symétrie ?
3. Déduire des questions précédentes l'expression de $g'(x)$ et la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\text{Log}\,3} \frac{1}{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}\,\text{d}x.$$

   On ne cherchera pas à évaluer une primitive de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\text{e}^x + \text{e}^{-x}} = \frac{\text{e}^x}{\text{e}^{2x} + 1}.$$

EXERCICE 2

Une entreprise de sondage interroge des consommateurs sur l'utilisation d'un produit commercial A.

La probabilité pour qu'une personne choisie au hasard s'estime satisfaite de ce produit est 0,3.

1. L'enquête est effectuée auprès d'un échantillon de vingt consommateurs. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes de cet échantillon satisfaites du produit A.

   Pour $k \in \{0, 1, 2, 3, ..., 20\}$, exprimer $p_k = P(X = k)$ en fonction de k.
2. On considère à présent un nouvel échantillon de 100 personnes, parmi lesquelles 30 sont satisfaites du produit A.

   On interroge au hasard un groupe de vingt personnes de l'échantillon.

   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de consommateurs de ce groupe satisfaits du produit A.

   Pour $k \in \{0, 1, 2, 3, ..., 20\}$, exprimer $q_k = P(Y = k)$ en fonction de k.
3. On considère un nouvel échantillon de $10n$ personnes $n \in \mathbb{N}^\star$, et $n \neq 1$).

   On suppose que, parmi elles, $3n$ sont satisfaites du produit A. On interroge au hasard un groupe de 20 personnes de cet échantillon. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de consommateurs de ce groupe satisfaits du produit A.

   a. Pour $k \in \{0, 1, 2, 3, ..., 20\}$ exprimer $q_{n,\,k} = P(Z = k)$ en fonction de n et de k.

   b. Démontrer que, pour k fixé, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q_{n,\,k} = p_k$ (p_k ayant été défini au 1).

PROBLÈME

Dans tout le problème, le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est associé au plan vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathrm{P}}$, et rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie A

On considère l'application affine A de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point M de coordonnées $(x\,;\ y)$ associe le point $A(M)$ de coordonnées $(u\,;\ v)$ définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u &=& x-y\\ v &=& x+y.\end{array}\right.$$

1. Démontrer que A est bijective et déterminer sa réciproque A^{-1}.
2. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ dont les coordonnées vérifient $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$.
   Déterminer les ensembles $\mathscr{B} = A^{-1}(\mathscr{C})$ et $\mathscr{D} = A(\mathscr{C})$.
   Représenter sur un même dessin $\mathscr{C}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{D}$.

Partie B

1. Soit a un nombre réel non nul. On note f_a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall u \in \mathbb{R},\quad f_a(u) = u + \frac{a}{\pi}\sin(\pi u).$$

   a. Comparer $f_a(u)$ et $f_a(u+2k)$, k étant un élément de $\mathbb{Z}$.
   Comparer $f_a(u)$ et $f_a(-u)$.
   En déduire que la courbe représentative de f_a se déduit de celle de la restriction de f_a à l'intervalle $[0\,;\,1]$ à l'aide de transformations simples que l'on précisera.

   b. Étudier suivant les valeurs de a les variations de f_a sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   c. Démontrer que si $|a| \leqslant 1$, alors f_a est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que sa restriction à $[-1\,;\ +1]$ applique bijectivement cet intervalle sur lui-même.

   d. Dans le cas où $|a| \leqslant 1$, préciser les points en lesquels la réciproque f_a^{-1} de f_a est dérivable.

   e. Tracer sur un même graphique, relativement à un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions $f_{\frac{12}{2}}$, f_1, f_2. On précisera les tangentes aux points remarquables.

2. Soit T l'application de $\mathscr{C}$ (définii au A 2 dans lui-même qui au point M de coordonnées $(u\,;v)$ associe le point M' de coordonnées $\left(u'\,;\ v'\right)$ définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u' &=& f_{\frac{1}{2}}(u)\\ v' &=& f_{\frac{1}{2}}(v).\end{array}\right.$$

   a. Montrer que T est une application bijective.

   b. Quels sont les points de $\mathscr{C}$ invariants par T ?

Partie C

On considère un point M du plan $\mathscr{P}$ dont le mouvement est déterminé par la fonction vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ telle que

$$(\forall t \in \mathbb{R}),\ \overrightarrow{\mathrm{F}}(t) = \overrightarrow{\mathrm{O}M(t)} = \left(t - \frac{1}{\pi}\sin\pi t\right)\overrightarrow{\imath} + \pi\left(1 - \frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)\overrightarrow{\jmath}.$$

1. **a.** k étant un entier relatif, comparer

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}(t+2k) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{F}}(t).$$

Que peut-on conclure pour les points $M(t)$ et $M(t+2k)$?

b. Comparer $\overrightarrow{\mathrm{F}}(-t)$ et $\overrightarrow{\mathrm{F}}(t)$.

En déduire que les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à la droite $y'\mathrm{O}y$ passant par O et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\jmath}$.

2. **a.** Quand t décrit l'intervalle $[0;1]$, étudier le sens de variation des fonctions

$$\left\{\begin{array}{lcl}[0\,;\,1] & \to & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & x(t)=t-\dfrac{1}{\pi}\sin\pi t\end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{lcl}[0\,;\,1] & \to & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & y(t)=1-\dfrac{1}{\pi}\cos\pi t\end{array}\right.$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction associant à l'abscisse x de $M(t)$ son ordonnée y, lorsque t décrit $[0;1]$.

Construire la partie de la trajectoire décrite par $M(t)$ lorsque t décrit l'intervalle $[0;1]$.

Déterminer et tracer les tangentes aux extrémités de l'arc obtenu (pour $t=0$, on trouvera que $\overrightarrow{\mathrm{F}'}(0)=0$, on admettra que la tangente au point $M(0)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{F}''}(0)$, $\overrightarrow{\mathrm{F}'}$ désignant la fonction dérivée de $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{F}''}$ la fonction dérivée de $\overrightarrow{\mathrm{F}'}$.

Construire la trajectoire du point $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

3. Soit m le point de $\mathscr{P}$ dont le mouvement est défini par $\overrightarrow{\mathrm{O}m(t)}=\overrightarrow{\mathrm{F}'}(t)$.

Montrer que la trajectoire du point m est une ellipse dont on précisera le centre, les sommets, les foyers et l'excentricité. La dessiner.

La partie **C** est indépendante des autres.