∽ Baccalauréat Rouen septembre 1966 ∾
série mathématiques élémentaires

I.

Résoudre l'équation

$$\text{Log}\,x + \text{Log}(2-x) + \text{Log}(x+4) = \text{Log}\,5x.$$

II.

On construit, dans le plan orienté, de part et d'autre d'un segment AB, deux triangles : un triangle équilatéral AMB, dans lequel $\left(\overrightarrow{\text{MA}},\ \overrightarrow{\text{MB}}\right) = +60°$, un triangle isocèle ANB, possédant un angle de 30°et tel que NA = NB.
On envisagera deux cas de figure, suivant que l'angle de 30°est à la base ou au sommet du triangle ANB.
On effectue dans l'ordre indiqué les symétries par rapport aux quatre droites MA, MB, NB et NA.
Quel est le produit de ces quatre symétries ?
Dans chaque cas de figure les candidats préciseront les éléments permettant de définir la transformation produit.

III.

Les nombres x, y et m étant des nombres réels, on donne le système de deux équations à deux inconnues

$$\left\{\begin{array}{llcl}(1) & (m+2)x+(m-1)y & = & 2m,\\ (2) & (3m+2)x-(m-1)y & = & 2(m-2),\end{array}\right.$$

dans lequel x et y sont les inconnues et m un paramètre variable.

1. Résoudre et discuter ce système.
2. On se donne un repère orthonormé $x'\text{O}x, y'\text{O}y$ et l'on désigne par (D_m) les droites dont l'équation est (1), par (Δ_m) les droites dont l'équation est (2).
   a. Montrer que, lorsque m varie, toutes les droites (D_m) passent par un point fixe, A, et que toutes les droites (Δ_m) passent par un point fixe, B.
   b. Déterminer m pour que (D_m) et (Δ_m) aient même direction.
   Les deux droites sont-elles alors parallèles ou confondues ?
3. **a.** Lorsque (D_m) et (Δ_m) sont sécantes en un point P, montrer que les coordonnées de P sont liées par la relation $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x}$.
   b. Étudier et représenter graphiquement la fonction $y = f(x)$ précédente dans le repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.
   c. Déduire de cette étude l'ensemble des points P lorsque m varie.
   d. Montrer que l'aire comprise entre la courbe (C) d'équation $y = f(x)$, son asymptote oblique et les droites d'équations $x = a$ et $x = 2a$ $(a > 0)$ reste constante quand a varie.
4. On choisit de nouveaux axes de coordonnées, $X'\Omega X$, $Y'\Omega Y$, définis de la manière suivante :

   l'axe $Y'\Omega Y$ est confondu avec l'axe $y'\text{O}y$;

   l'axe $X'\Omega X$ est porté par l'asymptote oblique de la courbe (C) et a même sens que le vecteur dont les composantes scalaires dans le repère $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ sont +2 et +1.

$\overrightarrow{\text{I}}$ et $\overrightarrow{\text{J}}$, vecteurs unitaires des axes $X'X$ et $Y'Y$, ont mêmes modules que les vecteurs unitaires $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ des axes $x'x$ et $y'y$.

a. Exprimer $\overrightarrow{\text{I}}$ et $\overrightarrow{\text{J}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{I}}$ et $\overrightarrow{\text{J}}$.

b. x et y étant les coordonnées d'un point M dans Je repère $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, X et Y les coordonnées du même point dans le repère $X'\Omega X$, $Y'\Omega Y$, exprimer x et y en fonction de X et Y.

c. Déduire de cette étude l'équation de la courbe (C) ans le repère $X'\Omega X$, $Y'\Omega Y$.

d. Quelle est la nature de la courbe (C) ?

Calculer sa demi-distance focale, à $\dfrac{1}{100}$ près par défaut.

e. On désigne par U l'extrémité du vecteur d'origine Ω, somme des vecteurs $\overrightarrow{\text{I}}$ et $\overrightarrow{\text{J}}$.

Exprimer $\overrightarrow{\Omega\text{U}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{I}}$ et $\overrightarrow{\text{J}}$, puis de $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$. En déduire l'équation, rapportée au repère $z'\text{O}z$, $y'\text{O}y$, de la droite portant l'axe focal de (C).