∽ Baccalauréat Rouen septembre 1967 ∾
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Construire, dans un repère orthonormé la représentation graphique de la fonction

$$y = \sqrt{4-2x^2}.$$

II.

Résoudre l'équation

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 5\sin^2 x = 2$$

(x : arc exprimé en radians).
Représenter sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs solutions.

III.

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.

Partie A

1. Soit un point m variable du plan, de coordonnées $(x~;~y)$, μ le symétrique de m par rapport à la première bissectrice des axes, m' le symétrique de μ par rapport à $x'x$.
   Calculer les coordonnées, x' et y', de m', connaissant x et y. Préciser la transformation qui fait passer de m à m'.
2. On associe au point $m(x~;~y)$ le point M, de coordonnées X, Y, définies par les formules

$$\text{(I)} \quad \left\{\begin{array}{l c l} X &=& 1+y,\\ Y &=& 1-x.\end{array}\right.$$

   Montrer que cette transformation, notée (T_1) est une rotation, que l'on caractérisera par son centre, ω, et son angle.
3. m décrit la première bissectrice. Quel est l'ensemble des points M correspondants ?
   Montrer que les cercles de diamètre mM ont même axe radical.
   Quel est l'ensemble des milieux des segments mM ?

Partie B

1. On associe au point $m(x~;~y)$ le point m' de coordonnées x', y' définies par les formules

$$\text{(II)} \quad \left\{\begin{array}{l c l} x' &=& x\sin\theta + y\cos\theta,\\ y' &=& -x\cos\theta + y\sin\theta.\end{array}\right.$$

   θ étant un angle donné, défini à 2π près.
   Montrer que cette transformation, notée (T_2), possède, dans le cas où $\sin\theta$ est différent de 1, un point double, qui est l'origine, O, du repère.
   Dans ces conditions, montrer que Om =Om' et que (T_2) est une rotation.
   Que peut-on dire de (T_2) lorsque $\sin\theta = 1$?

2. On associe au point $m(x\ ;\ y)$ le point M de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ définies par les formules

$$\text{(III)}\quad \left\{\begin{array}{lcl} X & = & a + x\sin\theta + y\cos\theta,\\ Y & = & a - x\cos\theta + y\sin\theta,\end{array}\right.$$

a étant un nombre réel donné non nul et θ un angle donné défini à $2k\pi$ près.
Montrer que cette transformation, (T_3), est, dans le cas où $\sin\theta$ est différent de 1, une rotation.
Calculer les coordonnées, $x_0,\ y_0$, du centre, ω, en fonction de a et θ.
Calculer $x_0 + y_0$ et $\dfrac{y_0}{x_0}$ $\left(\text{rapport exprimé en fonction de tg}\,\frac{\theta}{2}\right)$. Montrer que, si θ varie, a restant fixe, l'ensemble des points Ω est une droite, (D) ; que, si a varie, θ étant fixe, l'ensemble des points ω est une droite, (D').
Calculer, en fonction de θ, l'angle orienté $(\mathrm{O}x,\ \mathrm{D}')$.
Utiliser les résultats précédents pour donner une construction géométrique simple de (T_3), connaissant a et θ.

Partie C

Montrer que la transformation (T_1) est un cas particulier de la transformation (T_3) et retrouver ainsi les résultats de la question **A 2.**

N. B. - Les parties **A** et **B** peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.