Sciences et Technologies de l'Agronomie et de l'Environnement Métropole–Antilles–Guyane–La Réunion session septembre 2006

Exercice 1 **7 points**

Dans l'étalage d'un fleuriste, se trouve un vase contenant 10 tulipes jaunes et 5 tulipes rouges. Un client constitue un bouquet de 4 tulipes choisies au hasard dans ce vase.

1. Montrer qu'il y a 1 365 bouquets possibles.

2. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tulipes rouges dans un bouquet.

   a. Quelles sont les différentes valeurs x_i que peut prendre X ?

   b. Calculer les probabilités p_i correspondant aux valeurs x_i trouvées en a. : on laissera les p_i sous forme de fractions de dénominateur égal à 1 365.

   c. Recopier et compléter le tableau suivant, résumant la loi de probabilité associée à la variable aléatoire X.

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i) = p_i$					

   d. Calculer à 10^{-4} près l'espérance mathématique de X, notée $\text{E}(X)$.

Exercice 2 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \sin x(\sin x - 1).$$

On note $\left(\mathscr{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que $f'(x) = \cos x(2\sin x - 1)$.

2. Résoudre sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ l'équation : $f'(x) = 0$. Que peut-on en déduire pour $\left(\mathscr{C}_f\right)$?

3. Soit A le point de la courbe d'abscisse $\dfrac{\pi}{3}$. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée de A.

4. Donner une équation de la tangente à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point d'abscisse 0.

Exercice 3 **8 points**

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,4]$ par :

$$g(x) = x^2 - 5x + 4 + 2\ln x$$

et $\left(\mathscr{C}_g\right)$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer la limite en 0 de g. Interpréter graphiquement cette limite.

2. Montrer que pour tout x de $]0~;~4]$, $g'(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x}$.

3. **a.** Étudier le signe de $2x^2 - 5x + 2$ sur $]0~;~4]$.

b. En déduire que $g'(x) \leqslant 0$ si et seulement si : $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$.

4. Dresser le tableau de variations de g sur $]0~;~4]$. On donnera les valeurs exactes de $g(4)$, $g(2)$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

5. Recopier et compléter le tableau suivant :
Les valeurs numériques de g seront arrondies à 10^{-2} *près.*

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3	4
$g(x)$							

6. Construire la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ sur $]0~;~4]$ dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

7. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2~;~3[$.

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.