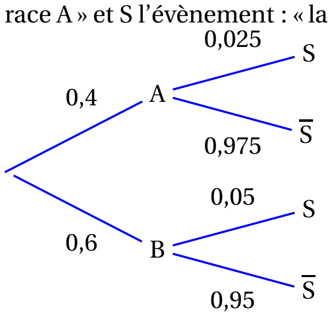
∽ Sciences et Technologies de l'Agronomie et de l'Environnement ∾
Métropole session juin 2000 Correction

Exercice 1

Dans un troupeau, un berger possède des brebis de deux races A et B.
La race A est représentée dans la proportion de 40 %.
Une étude sur la fécondité des races A et B a donné les résultats suivants :
2,5 % des brebis A sont stériles, 5 % des brebis B sont stériles.

1. On choisit une brebis au hasard. Dressons l'arbre de probabilités correspondant à la situation.
Notons A l'évènement : « la brebis est de race A » et S l'évènement : « la brebis est stérile ».



Calculons la probabilité qu'elle soit stérile.

$$p(S) = P(A) \times p_A(S) + p(B) \times p_B(S) = 0{,}4 \times 0{,}025 + 0{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}04.$$

Nous obtenons bien $0,04$.

2. Le berger prélève au hasard, pour les examiner, successivement et avec remise, 12 brebis dans le troupeau.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de brebis stériles sur les 12.

a. La loi de probabilité de X est une loi binomiale lorsqu'il s'agit d'une répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues de probabilité p et q telles que $p + q = 1$.
Les épreuves sont indépendantes entre elles et n'ont que deux issues, « La brebis est stérile » avec une probabilité égale à 0,04, « la brebis n'est pas stérile » avec une probabilité q égale à 0,96. Il y a répétition de 12 examens. Nous avons donc une loi binomiale de paramètres (12 ; 0,04)
par conséquent $p(X = k) = \binom{12}{k}(0{,}04)^k(0{,}96)^{12-k}$.

b. La probabilité pour que, sur ces 12 brebis, 3 exactement soient stériles, est

$$p(X = 3) = \binom{12}{3}(0{,}04)^3(0{,}96)^9 \approx 0{,}0098.$$

c. La probabilité pour que, sur ces 12 brebis, aucune ne soit stérile, est

$$p(X = 0) = 0{,}96^{12} = 0{,}6127$$

Exercice 2

Dans un laboratoire pharmaceutique, un machine met un médicament en sachets. Les masses des sachets se répartissent suivant la loi normale de moyenne $m = 250$ mg et d'écart-type $\sigma = 6$ mg.
On pourra utiliser une table de la loi normale centrée réduite pour répondre aux questions suivantes :

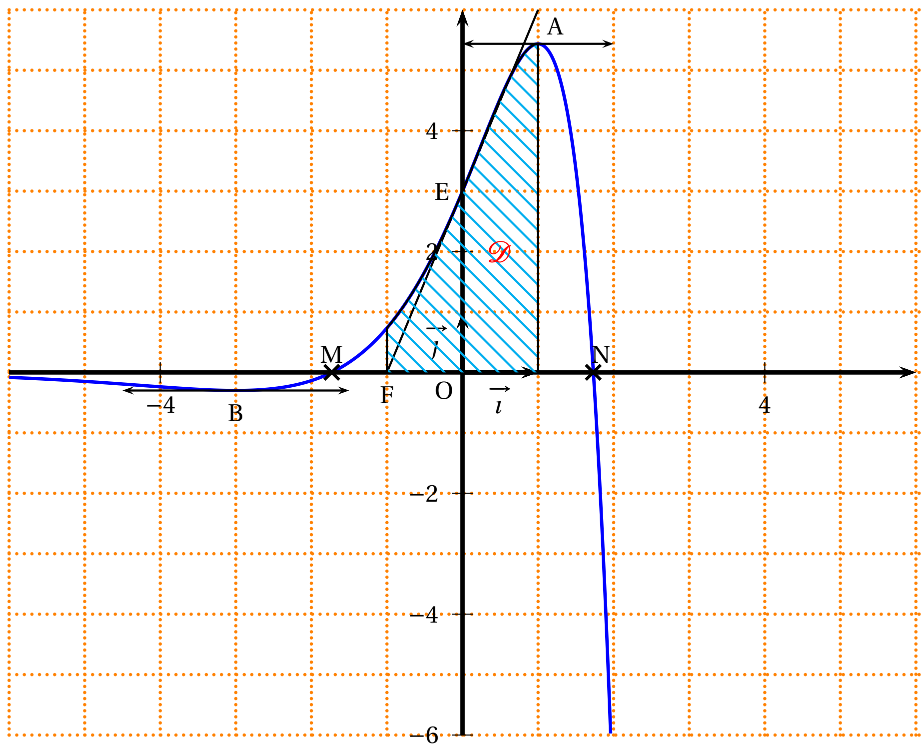
1. Notons X la variable aléatoire prenant pour valeur la masse d'un paquet pris au hasard.
   D'après l'énoncé, la loi de probabilité de cette variable aléatoire X est la loi normale de moyenne 250 et d'écart-type 6. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(250,\ 6)$
   Pour calculer les probabilités demandées, utilisons le théorème suivant : Dire que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est la loi normale $\mathcal{N}(250\ ;\ 6)$, est équivalent à dire que la loi de probabilité de la variable aléatoire U définie par $\dfrac{X-250}{6}$ est la loi normale centrée et réduite.
   La probabilité qu'un sachet pris au hasard ait une masse comprise entre 244 et 255 est notée $p(244 \leqslant X \leqslant 255)$.
   $p(244 \leqslant X \leqslant 255)$ est équivalente à $p\left(-1 \leqslant U \leqslant \dfrac{5}{6}\right)$
   $p\left(-1 \leqslant U \leqslant \dfrac{5}{6}\right) = p(U \leqslant 0{,}83) - p(U \geqslant -1) = p(U \leqslant 0{,}83) - \big(1 - p(U \leqslant 1)\big)$
   Dans la table de la loi normale centrée réduite, nous pouvons lire que $p(U \leqslant 1) = 0{,}8413$ et $p(U \leqslant 0{,}83) = 0{,}7967$)
   donc $p(244 \leqslant X \leqslant 255) = 0{,}7967 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}638$.
   la probabilité pour que la masse d'un sachet soit comprise entre 244 mg et 255 mg est 0,638.
2. Déterminons combien, sur un lot de 1 000 sachets, il y aura approximativement de sachets dont la masse est inférieure à 242 mg. Calculons $p(X \leqslant 242)$.
   $p(X \leqslant 242)$ est équivalente à $p\left(U \leqslant -\dfrac{4}{3}\right)$ ou encore à $1 - p(U \leqslant 1{,}33)$.
   Dans la table, nous pouvons lire $p(U \leqslant 1{,}33) = 0{,}9082$.
   $p(X \leqslant 242) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$
   Pour un lot de 1 000 sachets, 92 est un nombre approximatif de sachets ayant une masse inférieure à 242 mg .

Exercice 3

Partie A : Lecture graphique

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous, représente une fonction f définie et dérivable sur $]-\infty\ ;\ 2]$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$, unités graphiques : 1 cm en abscisses et 0,8 cm en ordonnées.
Aux points A et B, les tangentes à la courbe sont horizontales.
Au point E d'abscisse 0, la tangente à $\mathcal{C}$ est la droite (EF).

1. Par lecture graphique,
   $f(0) = 3$, nous lisons l'ordonnée du point E.
   $f'(1) = 0$ puisqu'en A, la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.
   $f'(-3) = 0$ puisqu'en B, la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.
   $f'(0) = 3$. Calculons le coefficient directeur de la droite (EF) : $\dfrac{y_\mathrm{F} - y_\mathrm{E}}{x_\mathrm{F} - x_\mathrm{E}} = \dfrac{0-3}{-1-0} = 3$
2. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point E est $y = 3x + 3$. (EF) est la tangente en E à $\mathcal{C}_f$.
3. Déterminons graphiquement la limite de f en $-\infty$.
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ car la courbe est asymptote à l'axe des abscisses lorsque x tend vers $-\infty$.
4. Résolvons graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
   La courbe coupe l'axe des abscisses en deux points M $(\alpha\ ;\ 0)$ et N $(\beta\ ;\ 0)$ avec $\alpha \approx -1{,}7$ et $\beta \approx 1{,}7$, $\mathcal{S} = \{\alpha\ ;\ \beta\}$.
5. Résolvons graphiquement l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
   Si f est croissante sur I, alors $f' \geqslant 0$ sur cet intervalle, d'où $\mathcal{S} = [-3\ ;\ 1]$.



Partie B : Étude d'une fonction

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,2]$ par :

$$f(x) = \left(3 - x^2\right)\mathrm{e}^x.$$

1. a. Déterminons $f'(x)$.

$f'(x) = (-2x)\mathrm{e}^x + \left(3 - x^2\right)\mathrm{e}^x = \left(-x^2 - 2x + 3\right)\mathrm{e}^x$

Étudions son signe sur $]-\infty\,;\,2]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{e}^x > 0$ par conséquent $f'(x)$ est du signe de $-x^2 - 2x + 3$. Ceci est un trinôme du second degré, calculons Δ. $\Delta = (-2)^2 - 4(-1)(3) = 16$

$\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{16}}{2(-1)} = -3$ ou $x_2 = \dfrac{-2}{-2} = 1$.

Le trinôme est du signe de a ici $a = -1$ pour $x \in]-\infty\,;\,x_1[\cup]x_2\,;\,+\infty[$ et du signe de $-a$ pour $x \in]x_1\,;\,x_2[$. Par conséquent nous avons

x	$-\infty$		-3		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. Dressons le tableau de variations de f.

Si pour tout $x \in I$ $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

$f'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty\,;\,-3[$ ou pour $x \in]1\,;2]$ par conséquent f est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

$f'(x) > 0$ pour $x \in]-3\,;\,1[$, par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau de variations de f sur $]-\infty\,;\,2]$.

x	$-\infty$		-3		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-6\mathrm{e}^{-3}$	$\nearrow$	$2\mathrm{e}$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^2$

2. Résolvons l'équation $f(x) = 0$.

$$(3 - x^2)\mathrm{e}^x = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$, nous sommes amenés à résoudre

$$3 - x^2 = 0$$

$$(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) = 0$$

Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des facteurs le soit, d'où

$\sqrt{3} - x = 0$ ou $\sqrt{3} + x = 0$

$x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\right\}$.

3. Soit F la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 2]$ par :

$$F(x) = \left(-x^2 + 2x + 1\right)\mathrm{e}^x.$$

a. F est une primitive de f sur $]-\infty\ ;\ 2]$ si $F'(x) = f(x)$.

$F'(x) = (-2x + 2)\mathrm{e}^x + (-x^2 + 2x + 1)\mathrm{e}^x = (-x^2 + 3)\mathrm{e}^x = f(x)$. F est une primitive de f sur $]-\infty\ ;\ 2]$.

b. Soit $\mathcal{D}$ le domaine plan compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = 1$.

f étant strictement positive sur [-1 ; 1], en unités d'aires l'aire de ce domaine $\mathcal{D}$ est $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{-1}^{1} = F(1) - F(-1) = \left(-(1)^2 + 2 \times 1 + 1\right)\mathrm{e} - \left(\left(-(-1)^2 + 2 \times (-1) + 1\right)\mathrm{e}^{-1}\right) = 2\mathrm{e} + 2\mathrm{e}^{-1}$$

L'aire de $\mathcal{D}$ est $2\mathrm{e} + 2\mathrm{e}^{-1}$ unités d'aire. L'unité d'aire vaut 0,8 cm^2.