∽ Baccalauréat S.T.A.E.-S.T.P.A. ∾
Métropole juin 2003
(Coefficient : 2 - Durée : 2 heures)

L'utilisation d'une calculatrice et du formulaire est autorisée

Exercice 1 :

Un groupe d'amis est constitué de 5 garçons et 4 filles, tous conducteurs.
Ils tirent au sort les noms de ceux qui devront rester sobres tout au long de la soirée et servir de conducteurs.
Chacun écrit son nom sur un carton qui est glissé dans une boîte.
On considère l'épreuve qui consiste à extraire au hasard, simultanément, deux cartons de la boîte.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :
Dans cette partie, les résultats des probabilités seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

On note G l'évènement : « les deux noms extraits sont des noms de garçons ».
On note F l'évènement : « les deux noms extraits sont des noms de filles ».
On note S l'événement : « les deux noms extraits correspondent à des sexes différents ».

1. Calculer les probabilités $p(\text{G})$, $p(\text{F})$.
2. En déduire la probabilité que les deux conducteurs tirés au sort soient de même sexe.
3. Montrer que $p(\text{S}) = \dfrac{5}{9}$.

Partie B

Au cours des 8 semaines de vacances d'été, les 9 amis sortent ensemble tous les samedis soirs. On répète donc chaque samedi l'épreuve décrite au début de l'exercice.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de S au cours des ces huit épreuves.
Dans cette partie, les résultats des probabilités seront exprimés sous forme décimale, arrondis à 10^{-4} près.

1. Montrer que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \dfrac{5}{9}$.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une réalisation de S au cours de ces huit épreuves.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au plus une réalisation de S au cours de ces huit épreuves

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = \text{e}^x + 2\ln(x+1),$$

et $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'unités graphiques : 4 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. Calculer la limite de f au voisinage de -1. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?

2. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $]-1~;~2]$.

   b. Montrer que pour tout x de $]-1~;~2]$, $f'(x) > 0$.

   c. En déduire le tableau de variations de f sur $]-1~;~2]$. On indiquera la valeur exacte de $f(2)$.

3. **a.** Recopier et compléter le tableau suivant :
   Les valeurs numériques de f seront arrondies à 10^{-1} près.

x	$-0,8$	$-0,7$	$-0,5$	$-0,2$	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$									

   b. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-0,5~;~-0,2]$.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. Soit la fonction F définie sur $]-1~;~2]$ par :

$$F(x) = \text{e}^{x} + 2(x+1)\ln(x+1) - 2x.$$

   a. Montrer que F est une primitive de f sur $]-1~;~2]$.

   b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   Donner ensuite une valeur arrondie à 10^{-2} près, en cm^2, de cette aire.