Sciences et Technologies de l'Agronomie et de l'Environnement Métropole session septembre 2000

Exercice 1

Pour cause de pollution de l'air, le conseil municipal d'une grande ville décide d'interdire, pendant une journée, la circulation en ville aux véhicules non prioritaires portant un numéro pair. On sait que :

- 4 % des véhicules sont prioritaires.
- $\dfrac{7}{16}$ des véhicules non prioritaires portent un numéro pair.
- La moitié des véhicules prioritaires portent un numéro impair.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en indiquant, pour un total de 100 véhicules, le nombre de véhicules de chaque catégorie.

	Véhicule prioritaire	Véhicule non prioritaire	Total
Numéro pair			
Numéro impair			
Total			100 %

2. On considère les évènements :
A : « le véhicule est prioritaire » et
B : « le véhicule porte un numéro pair ».

a. Calculer les probabilités suivantes : Prob(A), Prob(B), Prob(A $\cap$ B) et Prob(A $\cup$ B).

b. Quelle est la probabilité qu'un véhicule n'ait pas le droit de circuler ce jour là ?

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

3. L'épreuve consiste à contrôler au hasard un véhicule en centre ville. On admet que la probabilité que son conducteur soit en infraction pour diverses raisons est $p = 0,15$.
25 contrôles sont effectués au hasard de manière indépendante, un conducteur pouvant être contrôlé plusieurs fois. On note X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre d'infractions constatées parmi les 25 contrôles effectués.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Calculer la probabilité que 5 véhicules contrôlés soient en infraction.

Exercice 1

Partie 1 : Détermination d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a\text{e}^{3x} + b\text{e}^{2x},$$

où a et b sont deux nombres réels. La courbe $\mathcal{C}_f$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de cette fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
La droite T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
On se propose dans cette partie de déterminer les réels a et b.

1. Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$. Justifier les réponses données.

2. Déterminer par le calcul la fonction dérivée f' de la fonction f (on exprimera $f'(x)$ en fonction de $a,\ b$ et x).

3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs respectives de a et b.

Partie 2 : Étude de cette fonction

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 2]$ par

$$f(x) = -\mathrm{e}^{3x} + 3\mathrm{e}^{2x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. On vérifiera que le résultat obtenu est en accord avec la courbe proposée.

2. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

b. Montrer que $f'(x)$ est du signe de $(2-\mathrm{e}^{x})$.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\ ;\ 2]$ et dresser le tableau des variations de f sur $]-\infty\ ;\ 2]$. On calculera les valeurs exactes de $f(\ln 2)$ et $f(2)$.

3. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$. En déduire une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A. On vérifiera que les résultats obtenus sont en accord avec la courbe proposée.

4. **a.** Déterminer une primitive F de la fonction f sur $]-\infty\ ;\ 2]$.

b. Calculer une valeur exacte de l'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axes des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.