∽ Sciences et Technologies de l'Agronomie ∾ et de l'Environnement Métropole novembre 2002

Exercice 1

Un concessionnaire vient de recevoir un lot de 500 voitures à vendre d'occasion.
Il sait que sur ces 500 voitures, 10 présentent a moins un défaut d'allumage, 8 présentent au moins un défaut de freinage et 5 présentent les deux défauts.
On note A l'évènement : « la voiture présente un défaut d'allumage ».
On note F l'évènement : « la voiture présente un défaut de freinage ».

1. Traduire l'énoncé en donnant $p(\text{A})$, $p(\text{F})$, $p(\text{A} \cap \text{F})$.
2. Déterminer la probabilité qu'une voiture du lot présente au moins l'un des deux défauts.
3. Sachant qu'une voiture donnée du lot présente un défaut d'allumage, déterminer la probabilité qu'elle présente un défaut de freinage.

Partie B

Dans cette partie, on arrondira les résultats à 10^{-3} *près.*

Le concessionnaire procède à un test : il prélève une voiture au hasard, teste si elle est défectueuse, c'est-à-dire si elle présente au moins l'un des deux défauts. Il répète cette expérience 10 fois, de manière indépendante.
On note X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de voitures défectueuses lors des 10 contrôles.
La probabilité qu'une voiture soit défectueuse est égale à $0,026$.

1. Justifier que la loi de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   a. aucune voiture n'est défectueuse lors de ces 10 contrôles.
   b. Au moins deux voitures sont défectueuses lors de ces 10 contrôles.

Exercice 1

Partie A

La courbe $\mathscr{C}_g$ présentée dans le document en annexe est la représentation graphique dans un repère orthonormal d'une fonction g définie et dérivable sur $]0~;~2]$. La tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

1. À l'aide du graphique, et en expliquant la démarche adoptée, répondre aux questions suivantes :
   a. Donner $g(1)$ et $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
   b. Déterminer le maximum de g. En déduire que pour tout x de $]0~;~2]$, $g(x) - 4 < 0$.
2. On admet que la fonction g définie sur $]0~;~2]$ par : $g(x) = a + b\ln x - 2x^2$.
   a. En utilisant les valeurs du 1. a., déterminer les réels a et b.
   b. En déduire que pour tout x de $]0~;~2]$, $g(x) = 3 + \ln x - 2x^2$.

Dans la suite, on admettra que pour tout x de $]0~;~2]$, $g(x) - 4 < 0$.

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur $]0~;~2]$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un nouveau repère orthogonal d'unités graphiques : 5 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

   b. Vérifier que pour tout x de $]0~;~2]$, $f'(x) = \dfrac{4 - g(x)}{x^2}$.

   c. En se référant à la partie A, étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0~;~2]$.

   d. Donner le sens de variation de f sur $]0~;~2]$.
2. Étudier la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
3. Recopier et compléter le tableau suivant :
   Les valeurs numériques de f seront arrondies à 10^{-1} près.

x	0,2	0,3	0,4	0,5	1	1,5	2
$f(x)$							

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le nouveau repère.

ANNEXE